ÚLOHY Z MECHANIKY I
Jednoduché soustavy spojené vláknem

Studijní text pro řešitele FO kategorie D a ostatní zájemce o fyziku

Jan Prachař a Jaroslav Trnka

Obsah

Úvod

Tento text je určen k přípravě řešitelů Fyzikální olympiády na řešení jednoduchých úloh z mechaniky, navazuje na učebnici fyziky pro gymnázia [1]. Snaží se, aby čtenáři lépe pochopili chování mechanických soustav pod vlivem konstantních sil. Text je zaměřen na řešení úloh o jednoduchých soustavách těles spojených vláknem. Jedná se o soustavy kladek a na nich zavěšených závaží a o soustavy, jejichž součástí jsou kromě kladek a těles spojených vláknem ještě nakloněné roviny. Výklad je postaven zejména na příkladech, přinese vám tedy jistou zručnost při řešení podobných úloh.

Na začátku každé kapitoly je stručný výklad teorie, pak následuje několik ukázkových příkladů, abyste do problému dostatečně pronikli. Na konci textu najdete úlohy k samostatnému řešení, na kterých si můžete vyzkoušet, jak dobře jste výklad pochopili, a procvičit si řešení zadaných úloh.

Při řešení každé úlohy je třeba si pozorně přečíst text a vypsat si známé a hledané veličiny. Rovněž si uvědomíme, za jakých zjednodušujících předpokladů úlohu řešíme. Úlohy vždy vyřešíme nejprve obecně, potom teprve dosadíme zadané číselné hodnoty a dopočítáme výsledek, který zaokrouhlíme na stejný počet platných číslic, jako mají hodnoty zadaných veličin. Pro kontrolu je vhodné během výpočtu dělat rozměrové kontroly, tj. zjišťovat, jestli obě strany rovnice mají stejný fyzikální rozměr (jednotku); tím se snáze vyvarujeme chyb.

1 Zákon síly

1.1 Newtonovy pohybové zákony

V úvodu jsme zmínili, že se budeme zabývat jednoduchými mechanickými soustavami těles. V této kapitole si zopakujeme pohybové zákony, kterými se tato tělesa řídí. Abychom mohli soustavy těles nějakým způsobem popsat, musíme si vybrat vztažnou soustavu, ze které se na ně budeme dívat. Většinou volíme pozorovatele, který stojí na povrchu Země. V této soustavě zavádíme souřadnice, které jednoznačně popisují polohu každého tělesa.

Pro formulaci pohybových zákonů nevystačíme se samotnou znalostí polohy tělesa. Využijeme také vektorové veličiny *rychlost* $\boldsymbol{v}$ a *zrychlení* $\boldsymbol{a}$. V našich soustavách bude mít zrychlení konstantní velikost a konstantní směr stejný nebo opačný jako okamžitá rychlost. Potom pro vektor rychlosti $\boldsymbol{v}$ platí

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{a}t\,,$$

kde $\boldsymbol{v}_0$ je počáteční rychlost (rychlost v čase $t = 0\,\mathrm{s}$). Uvedeme vztahy i pro velikost rychlosti v a dráhu s, kterou těleso urazí. Zde je však třeba rozlišit rovnoměrně zrychlený a rovnoměrně zpomalený pohyb.

Rovnoměrně zrychlený pohyb – zrychlení má stejný směr jako okamžitá rychlost

Rovnoměrně zpomalený pohyb – zrychlení má opačný směr než okamžitá rychlost

$$v = v_0 + at\,, \qquad v = v_0 - at\,, \tag{1}$$

$$s = s_0 + v_0t + \frac{1}{2}at^2, \qquad s = s_0 + v_0t - \frac{1}{2}at^2, \tag{2}$$

kde v_0 je velikost počáteční rychlosti a s_0 je počáteční dráha (dráha, kterou těleso urazilo před tím, než jsme začali měřit čas).

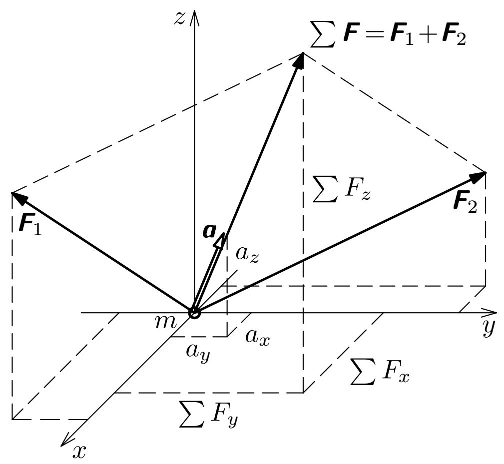
Víme, že zrychlení tělesa je způsobeno vzájemným působením s ostatními tělesy. Toto působení popisujeme *silou*, což je vektorová fyzikální veličina. Pokud řekneme, že na těleso působí síla $\boldsymbol{F}$, myslíme tím, že na těleso působí okolní tělesa a toto působení popisujeme silou $\boldsymbol{F}$.

Zákon, který uvedeme dále, nebude platit pro všechny pozorovatele. Používat ho budou moci jen ti, kteří se nacházejí v *inerciálních vztažných soustavách*. V našich příkladech budeme používat téměř výhradně tzv. *laboratorní soustavu*, tj. soustavu pozorovatele stojícího na povrchu Země. Tato soustava není ve skutečnosti přesně inerciální vlivem rotace Země. Pokud ovšem jako sílu, kterou působí Země na tělesa na svém povrchu, uvažujeme tíhovou sílu (vektorový součet gravitační a odstředivé síly) místo gravitační síly a neprovádíme velice přesná měření, můžeme ji za inerciální považovat.

Inerciální vztažné soustavy popsal Newton tím, že *volný hmotný bod* se vůči nim pohybuje bez zrychlení (zůstává v klidu nebo se pohybuje rovoměrně přímočaře). Volným hmotným bodem rozuměl hmotný bod, na nějž nepůsobí silou žádné okolní hmotné body, nebo výslednice těchto sil (vektorový součet) je nulová. Získáváme tak známou formulaci **1. Newtonova zákona**.

Pokud výslednice sil, kterými na hmotný bod působí okolní tělesa, je nulová, pak tento hmotný bod zůstává v inerciální vztažné soustavě v klidu nebo se pohybuje rovoměrně přímočaře.

Tento zákon využijeme při řešení statických úloh, kdy budeme vyšetřovat, za jakých podmínek zůstává hmotný bod v klidu.



Obr. 1

Při řešení dynamických úloh budeme vycházet z **2. Newtonova pohybového zákona**. Pro každé těleso *konající posuvný pohyb* platí

$$\boxed{m\boldsymbol{a} = \sum \boldsymbol{F}.} \tag{3}$$

Na levé straně je součin hmotnosti tělesa a jeho zrychlení v inerciální soustavě. Na pravé straně rovnice (3) je *výslednice* všech sil působících na těleso. V tomto textu se naučíme přiřadit každému tělesu tuto výslednici. Dosadíme-li na pravou stranu rovnice výraz, který vyjadřuje, na čem výslednice u daného tělesa závisí, dostaneme *pohybovou rovnici* tohoto tělesa. Musíme vědět, že se jedná o rovnici vektorovou. Ve skutečnosti to tedy není rovnice jedna, ale tři – pro každou souřadnici zrychlení jedna:

$$ma_x = \sum F_x\,, \quad ma_y = \sum F_y\,, \quad ma_z = \sum F_z\,, \tag{4}$$

kde $\sum F_x$, $\sum F_y$ a $\sum F_z$ jsou souřadnice výslednice sil (viz obr. 1).

Při řešení úloh pomocí Newtonových rovnic je vhodné využít *silový diagram*. Do obrázku mechanické soustavy, ve které se nachází popisované těleso, zakreslíme pomocí šipek všechny síly $\boldsymbol{F}$, které na naše těleso působí. Z tohoto diagramu již potom snadno určíme výslednici všech sil. Známe-li hmotnost tělesa, je už snadné pomocí (3) určit hledané zrychlení.

Kapitolu uzavřeme posledním Newtonovým pohybovým zákonem, který využijeme při řešení pohybu soustavy těles. Při vzájemném dotyku dvou těles vznikají zároveň dvě síly. Silou $\boldsymbol{F}_{\mathrm{AB}}$ působí první těleso na druhé a silou $\boldsymbol{F}_{\mathrm{BA}}$ působí druhé těleso na první. Podle **třetího Newtonova pohybového zákona** mají tyto síly stejnou velikost a opačný směr

$$\boxed{\boldsymbol{F}_{\mathrm{AB}} = -\boldsymbol{F}_{\mathrm{BA}}.} \tag{5}$$

Jednu sílu nazýváme *akcí* a druhou *reakcí*, ke každé síle najdeme její reakci. Důležité je si uvědomit, že akce a reakce působí na různá tělesa, nemohou se tedy vzájemně vyrušit.

1.2 Některé typy sil

1.2.1 Tíhová síla

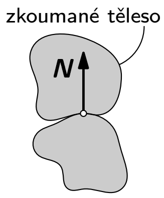
Tíhovou silou $\boldsymbol{F}_G$ budeme rozumět sílu, kterou působí Země na tělesa na svém povrchu. Tíhovou sílu určujeme podle vztahu

$$\boldsymbol{F}_G = m\boldsymbol{g}\,,$$

kde $\boldsymbol{g}$ je vektor tíhového zrychlení, který směřuje vždy svisle dolů. Je to zrychlení tělesa padajícího volným pádem bez odporu vzduchu. Ve všech příkladech počítáme s velikostí tíhového zrychlení $g = 9{,}81\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$.

1.2.2 Normálová tlaková síla

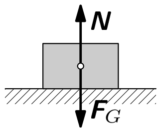
Normálová síla $\boldsymbol{N}$ je síla, kterou na zakoumané těleso působí jiné těleso, pokud je s ním ve vzájmeném dotyku bez tření (viz obr. 2). Říkáme jí normálová, protože působí vždy kolmo na povrch tělesa – ve směru normály.



Obr. 2

Například pokud těleso spočívá na podložce, působí na něj podložka silou (viz obr. 3). Je-li podložka vodorovná, tak podle prvního Newtonova pohybového zákona je vektorový součet tíhové síly a normálové síly od podložky nulový a platí

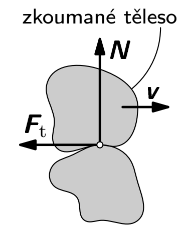
$$N - mg = 0 \quad \Rightarrow \quad N = mg\,.$$



Obr. 3

1.2.3 Třecí síla

V místech dotyku těles nemají obvykle síly vzájemného působení směr kolmý k povrchu těles a vedle normálové tlakové síly $\boldsymbol{N}$ vzniká i síla tečná – třecí síla $\boldsymbol{F}_\mathrm{t}$ (viz obr. 4). Pokud je zkoumané těleso při pohybu v dotyku s jiným tělesem, působí proti směru jeho pohybu (nebo zamýšleného pohybu) tato třecí síla. Například když těleso posunujeme po rovné podložce, působí proti jeho pohybu třecí síla, která je rovnoběžná s podložkou. Třecí síla tedy působí na těleso proti směru jeho okamžité rychlosti vzhledem k podložce.



Obr. 4

Obecně je tření jiné, je-li těleso vůči podložce v klidu nebo v pohybu. Proto zavádíme dva různé součinitele tření: součinitel smykového tření f – třecí síla při pohybu má velikost

$$F_\mathrm{t} = fN \tag{6}$$

a součinitel klidového (statického) tření f_0 – třecí síla v klidu má velikost

$$F_\mathrm{t} \leq f_0 N\,, \tag{7}$$

přičemž N je velikost normálové síly, kterou na těleso působí jiné těleso, se kterým je ve styku. Platí $f < f_0$.

Podrobnější výklad o třecí síle a jiných odporových silách najdete ve studijním textu [7].

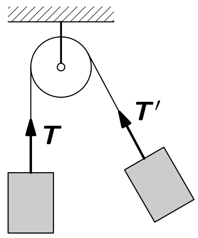
1.2.4 Tahová síla vlákna

Tělesa v soustavě těles mohou být vzájemně propojena vlákny, zajímat nás však budou jen ty případy, kdy budou vlákna napínána. Potom totiž vlákno zprostředkovává silové působení a vazbu mezi spojenými tělesy. Sílu, kterou napnuté vlákno působí na těleso, nazýváme tahová síla vlákna $\boldsymbol{T}$. Pokud vlákno spojuje dvě tělesa, označme $\boldsymbol{T}$ a $\boldsymbol{T}'$ síly, kterými vlákno působí na tělesa na svých koncích. Síly $\boldsymbol{T}$ a $\boldsymbol{T}'$ směřují od tělesa a mají směr vlákna (viz obr. 5).

Ve všech úlohách budeme předpokládat, že jsou vlákna *nehmotná* a *nepružná*, myslíme tím, že jejich hmotnost je mnohem menší než hmotnosti těles a že jejich délka je neměnná. Za těchto předpokladů platí

$$T = T' \,, \tag{8}$$

a to i v případech, kdy se tělesa pohybují se zrychlením, nebo kdy je vlákno vedeno přes *nehmotné kladky*, které se mohou otáčet bez tření (Jinak by se kladky otáčely s nekonečně velkým úhlovým zrychlením, protože mají nulový moment setrvačnosti).



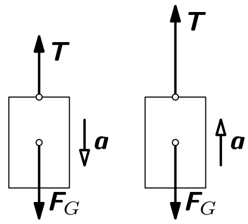
Obr. 5

Příklad 1 – výtah

S jakým největším zrychlením se může pohybovat kabina výtahu, jestliže její hmotnost při plném zatížení je 500 kg a maximální povolené zatížení lana je 7500 N?

Řešení

Nakreslíme silový diagram. Na kabinu výtahu působí tíhová síla $\boldsymbol{F}_{\mathrm{G}} = m\boldsymbol{g}$ a tahová síla lana $\boldsymbol{T}$. Předpokládejme, že kabina zrychluje dolů nebo zpomaluje při pohybu nahoru (viz obr. 6), a použijme pohybový zákon (4) pro svislé souřadnice



Obr. 6 Obr. 7

$$ma = mg - T \quad \Rightarrow \quad T = mg - ma \,.$$

Pokud kabina zrychluje nahoru nebo zpomaluje při pohybu dolů (viz obr. 7), potom platí

$$ma = -mg + T \quad \Rightarrow \quad T = mg + ma \,.$$

Vidíme tedy, že větší zatížení lana je při zrychlování kabiny vzhůru, při zrychlování dolů se naopak zatížení snižuje. Při nulovém zrychlení je lano napínáno silou

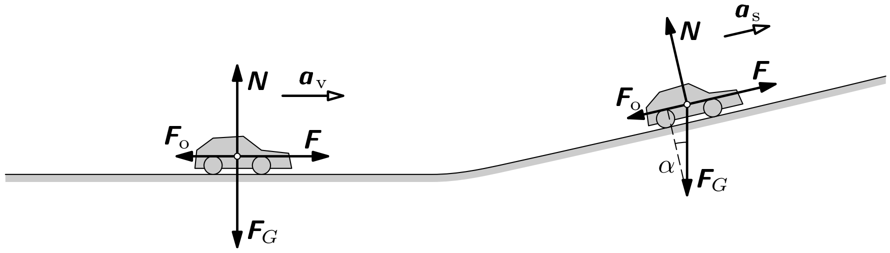
$$T = 4900 \text{ N} < T_{\max} \,.$$

Dolů tedy může výtah zrychlovat libovolně. Budeme proto hledat největší možné zrychlení kabiny vzhůru, při kterém není překročeno povolené zatížení

$$ma \le -mg + T_{\max} \quad \Rightarrow \quad a_{\max} = \frac{T_{\max}}{m} - g = 5{,}2 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2} \,.$$

Příklad 2 – do kopce

Osobní automobil se rozjíždí po vodorovné silnici se zrychlením velikosti $a_\mathrm{v} = 2{,}0\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$ a při stálém stoupání se zrychlením velikosti $a_\mathrm{s} = 1{,}6\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$. Vypočtěte úhel stoupání za předpokladu, že se tahová síla motoru ani valivý odpor nezměnily. Odpor vzduchu zanedbejte.



Obr. 8

Řešení

Nakreslíme silové diagramy na rovině i na kopci (obr. 8). Tahovou sílu auta označme $\boldsymbol{F}$ a odporovou sílu $\boldsymbol{F}_\mathrm{o}$. Napišme si pohybovou rovnici auta na rovině pro vodorovné souřadnice podle druhého Newtonova zákona (4)

$$ma_\mathrm{v} = F - F_\mathrm{o}\,.$$

Pohybová rovnice auta jedoucího do kopce je

$$ma_\mathrm{s} = F - F_\mathrm{o} - mg\sin\alpha\,.$$

Obě rovnice odečteme a vydělíme hmotností auta, dostáváme

$$\sin\alpha = \frac{a_\mathrm{v} - a_\mathrm{s}}{g}\,.$$

Po číselném dosazení vychází $\alpha = 2{,}3^\circ$, což odpovídá stoupání 4,0 %.

2 Mechanické soustavy

Jak jistě víte, příroda je velmi komplikovaná a nikterak nám neulehčuje naši snahu ji pochopit. Ani fyzika neumí přírodu popsat celou, ale vybírá si dílčí problémy, které umí vyřešit. V této kapitole budeme studovat nejjednodušší mechanické soustavy. Tělesa budou konat posuvné pohyby z klidu nebo s počáteční rychlostí v homogenním tíhovém poli Země. V úlohách zpravidla půjde o určení zrychlení jednotlivých těles a velikostí sil, kterými jsou při pohybu napnuta vlákna soustavy.

Při řešení úloh budeme používat veličinu a, která nebude mit význam *velikosti* zrychlení $\boldsymbol{a}$, ale bude chápána jako *souřadnice* zrychlení vzhledem k jeho předpokládanému směru, který je vyznačen na obrázku. Může tedy nabývat kladných i záporných hodnot podle toho, zda skutečný směr $\boldsymbol{a}$ souhlasí s předpokládaným, vyznačeným na obrázku, nebo ne.

2.1 Nakloněná rovina

Možná jste už někdy stáli na kopci a přemýšleli, za jak dlouho by se dalo nejrychleji dostat dolů do údolí. V obecném případě je to téměř neřešitelná úloha, ale pokud uděláme jisté zjednodušující předpoklady, můžeme se k nějakému výsledku dopracovat. A zde je hranice mezi skutečností a fyzikálním modelem. Předpoklady tohoto modelu jsou v přírodě splněny jen přibližně a volíme je tak, abychom zjednodušili výpočet a zároveň se příliš nevzdálili od skutečnosti.

V této části textu se budeme zabývat posuvným pohybem tělesa po nakloněné rovině. Nakloněnou rovinou rozumíme rovinu, která s vodorovným směrem svírá úhel α, a tělesem rozumíme kvádr o hmotnosti m. Položíme-li těleso na nakloněnou rovinu, působí na ně tíhová síla $\boldsymbol{F}_G$ a reakce nakloněné roviny $\boldsymbol{R}$. Ostatní síly (například odpor vzduchu) zanedbáváme a uvažovat je nebudeme. Působiště tíhové síly je v těžišti tělesa a její vektor směřuje svisle dolů. Vektorová přímka reakce $\boldsymbol{R}$ prochází těžištěm tělesa (viz obr. 9), jinak by síla $\boldsymbol{R}$ měla otáčivý účinek a těleso by nemohlo být v rovnováze nebo konat posuvný pohyb.

Síly $\boldsymbol{F}_G$ a $\boldsymbol{R}$ rozložíme do dvou směrů – rovnoběžného s nakloněnou rovinou a kolmého na nakloněnou rovinu (viz obr. 9). Průmět síly $\boldsymbol{F}_G$ do rovnoběžného směru označujme $\boldsymbol{F}_1$ a do kolmého $\boldsymbol{F}_2$. Pro jejich velikosti platí

$$F_1 = F_G \sin\alpha = mg \sin\alpha\,, \qquad F_2 = F_G \cos\alpha = mg \cos\alpha\,. \tag{9}$$

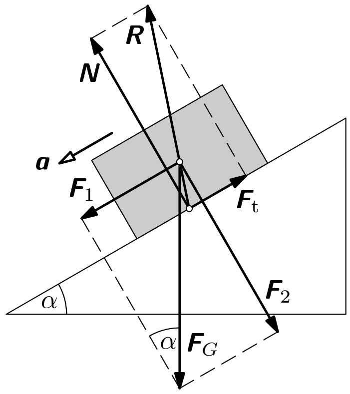
Složka reakce $\boldsymbol{R}$ kolmá na nakloněnou rovinu je normálová síla $\boldsymbol{N}$, složka rovnoběžná s nakloněnou rovinou je třecí síla $\boldsymbol{F}_\mathrm{t}$ – ta působí proti směru okamžité rychlosti. Síla $\boldsymbol{N}$ působí vždy proti síle $\boldsymbol{F}_2$ a navzájem se kompenzují (pokud těleso nebude na nakloněné rovině nadskakovat a pokud se nakloněná rovina nebude moci sama pohybovat, což ovšem zatím nebudeme uvažovat).

Teď si ukážeme, jak budeme při řešení úloh postupovat. Pro přehlednost je postup rozdělen do několika bodů.

1. Nakreslíme přehledný obrázek a zhotovíme silový diagram. Vyznačíme v obrázku všechny působící síly (tj. $\boldsymbol{F}_G$, $\boldsymbol{R}$ a případně tahové síly vláken) a rozložíme je do směru rovnoběžného s nakloněnou rovinou a do směru kolmého k nakloněné rovině.

2. Pokud zjišťujeme, za jakých podmínek zůstane těleso v klidu, využijeme 1. Newtonův pohybový zákon. Podle něj musí být výslednice sil působících na těleso nulová. Napíšeme tedy rovnice, které vyjadřují rovnováhu sil ve směru rovnoběžném s nakloněnou rovinou a ve směru kolmém na nakloněnou rovinu.

3. Pokud určujeme zrychlení tělesa $\boldsymbol{a}$, zakreslíme do obrázku jeho předpokládaný směr (obr. 9) a sestavíme pohybové rovnice podle 2. Newtonova pohybového zákona. Ve směru kolmém na nakloněnou rovinu bude rovnice vypadat takto



Obr. 9

$$ma_{\perp} = F_2 - N \quad \Rightarrow \quad N = F_2 = F_G \cos\alpha \,, \tag{10}$$

neboť se těleso v kolmém směru k nakloněné rovině nepohybuje ($a_{\perp} = 0$), obě síly jsou tedy v rovnováze.

Ve směru rovnoběžném s nakloněnou rovinou působí různé síly, píšeme pohybovou rovnici

$$ma = \sum F \,, \tag{11}$$

kde a je souřadnice zrychlení tělesa na nakloněné rovině a $\sum F$ je souřadnice výslednice sil působících ve směru rovnoběžném s nakloněnou rovinou.

Tuto výslednici určíme jako součet velikostí sil působících ve směru rovnoběžném s nakloněnou rovinou, ale síly, které mají stejný směr jako $\boldsymbol{a}$, píšeme v součtu s kladným znaménkem a síly působící proti směru $\boldsymbol{a}$ píšeme se záporným znaménkem.

Z pohybových rovnic (10) a (11) vypočítáme souřadnici zrychlení tělesa a. Pokud vyjde záporná, bude mít těleso zrychlení ve směru opačném, než jsme zvolili na obrázku. Pro popis pohybu potřebujeme znát, jak bude záviset velikost rychlosti v a dráha s na čase. Ty určíme ze vztahů (1) a (2).

Vše si ukažme na jednoduchém příkladu.

Příklad 3 – osamocené těleso na nakloněné rovině

Mějme těleso o hmotnosti m v klidu na nakloněné rovině, která svírá s vodorovným směrem úhel α. Součinitel smykového tření mezi ním a nakloněnou rovinou označme f, součinitel klidového tření f_0.

a) Určete, za jakých podmínek zůstane těleso v klidu.
b) V případě, že se těleso začne pohybovat, vypočítejte zrychlení tělesa $\boldsymbol{a}$ a určete, jak bude záviset rychlost a dráha na čase.
c) V případě, že těleso zůstane v klidu, popište pohyb tělesa, pokud mu udělíme počáteční rychlost $\boldsymbol{v}_0$ rovnoběžnou s nakloněnou rovinou.

Řešení

a) Nejdříve nakreslíme obrázek a do něj vyznačíme všechny působící síly, jejichž výslednice musí být nulová (obr. 10). Ve směru kolmém na nakloněnou rovinu působí síly $\boldsymbol{N}$ a $\boldsymbol{F}_2$, jejich rovnováhu vyjadřuje rovnice

$$N = F_2 \quad \Rightarrow \quad N = mg\cos\alpha\,. \tag{12}$$

Ve směru rovnoběžném s nakloněnou rovinou působí síly $\boldsymbol{F}_1$ a $\boldsymbol{F}_\mathrm{t}$, jejich rovnováhu vyjadřuje rovnice

$$F_\mathrm{t} = F_1 \quad \Rightarrow \quad F_\mathrm{t} = mg\sin\alpha\,. \tag{13}$$

Dobré je si uvědomit, že třecí síla nemůže těleso sama o sobě uvést do pohybu, působí totiž vždy proti směru pohybu, ať se těleso pohybuje jakkoli.

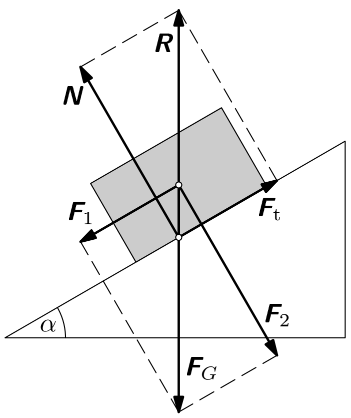
Pro klidové tření jsme uvedli vztah (7), ze kterého pomocí rovnic (12) a (13) dostaneme

$$mg\sin\alpha = F_\mathrm{t} \le f_0 N = f_0 mg\cos\alpha \quad \Rightarrow \quad f_0 \ge \operatorname{tg}\alpha\,,$$

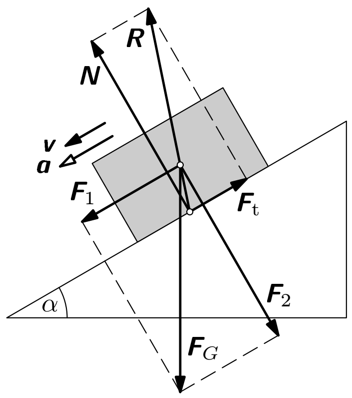
což je hledaná podmínka, při jejímž splnění zůstane těleso v klidu.

b) Těleso se začne pohybovat, je-li $f_0 < \operatorname{tg}\alpha$. Nakreslíme si obrázek, vyznačíme v něm působící síly a předpokládaný směr zrychlení (obr. 11). Pohybová rovnice ve směru kolmém na nakloněnou rovinu nám podle (10) dává

$$N = F_2 = mg\cos\alpha\,. \tag{14}$$



Obr. 10



Obr. 11

Pohybová rovnice v rovnoběžném směru s nakloněnou rovinou má podle (11) tvar

$$ma = F_1 - F_\mathrm{t}\,. \tag{15}$$

Velikost sil $\boldsymbol{F}_1$ a $\boldsymbol{F}_\mathrm{t}$ určíme ze vztahů (10) a (6)

$$ma = mg\sin\alpha - fN\,,$$

za velikost N dosadíme z rovnice (14) a pro souřadnici zrychlení a dostaneme

$$ma = mg\sin\alpha - fmg\cos\alpha \quad\Rightarrow\quad a = g\sin\alpha - fg\cos\alpha\,. \tag{16}$$

Využijme podmínku $f < f_0 < \mathrm{tg}\,\alpha$, pro souřadnici zrychlení platí $a > 0$, neboť

$$a = g(\sin\alpha - f\cos\alpha) > g(\sin\alpha - \mathrm{tg}\,\alpha\cos\alpha) = 0\,. \tag{17}$$

Zrychlení má stejný směr jako okamžitá rychlost, těleso tedy bude rovnoměrně zrychlovat dolů. Pro velikosti sil z pohybové rovnice (15) dostáváme $F_1 > F_\mathrm{t}$.

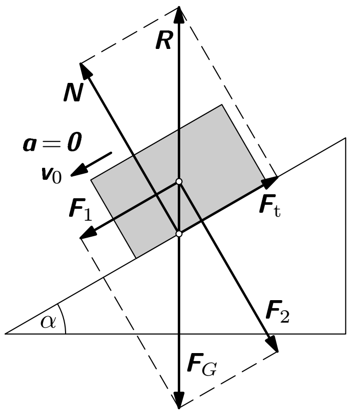
Velikost rychlosti a dráhu dopočítáme pomocí vztahů (1) a (2)

$$v = gt(\sin\alpha - f\cos\alpha)\,, \tag{18}$$

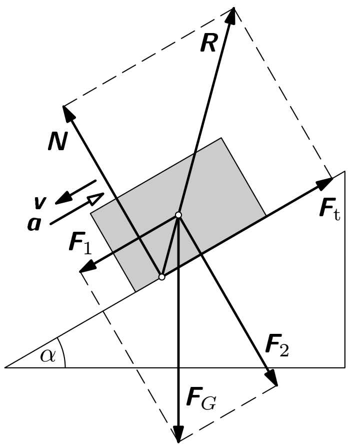
$$s = \frac{1}{2}gt^2(\sin\alpha - f\cos\alpha)\,. \tag{19}$$

c) Už víme, že těleso zůstává v klidu pro $f_0 \geq \mathrm{tg}\,\alpha$. Předpokládejme nejprve, že $\boldsymbol{v}_0$ směřuje dolů po nakloněné rovině. Nakreslíme obrázek (obr. 11). Pohybová rovnice je

$$ma = F_1 - F_\mathrm{t} = mg\sin\alpha - fmg\cos\alpha \quad\Rightarrow\quad a = g(\sin\alpha - f\cos\alpha)\,.$$



Obr. 12



Obr. 13

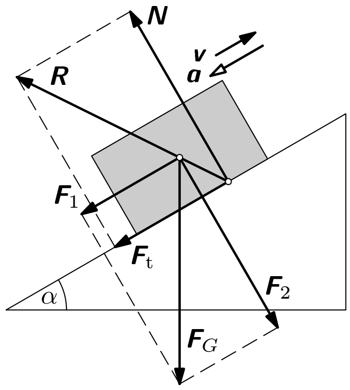
Pohyb tělesa závisí na hodnotě součinitele smykového tření f.
(i) $f < \operatorname{tg}\alpha$. Stejně jako v (17) ukážeme, že $a > 0$, $F_1 > F_\mathrm{t}$. Těleso tedy bude rovnoměrně zrychlovat dolů (viz obr. 11).
(ii) $f = \operatorname{tg}\alpha$. Podobně jako v (17) ukážeme, že $a = 0$, $F_1 = F_\mathrm{t}$. Těleso tedy bude klouzat rovnoměrným pohybem dolů rychlostí $\boldsymbol{v}_0$ (viz obr. 12).
(iii) $f > \operatorname{tg}\alpha$. Tedy $a < 0$, $F_1 < F_\mathrm{t}$, zrychlení má opačný směr než okamžitá rychlost. Těleso bude při pohybu dolů rovnoměrně zpomalovat, dokud nezastaví (viz obr. 13).

Nyní uvažujme, že $\boldsymbol{v}_0$ směřuje nahoru po nakloněné rovině. Nakreslíme obrázek (obr. 14), ve kterém vyznačíme předpokládaný směr zrychlení. Třecí síla bude opět působit proti směru pohybu, síla $\boldsymbol{F}_1$ naopak působí stále stejným směrem. Protože při pohybu dolů působila ve směru pohybu, teď bude síla $\boldsymbol{F}_1$ působit proti jeho směru. Pohybovou rovnici píšeme s drobnými změnami

$$ma = F_1 + F_\mathrm{t} = mg\sin\alpha + fmg\cos\alpha\,,$$

$$a = g(\sin\alpha + f\cos\alpha) > 0\,. \qquad (20)$$

Zrychlení má opačný směr než rychlost, těleso bude při pohybu nahoru rovnoměrně zpomalovat, dokud nezastaví.

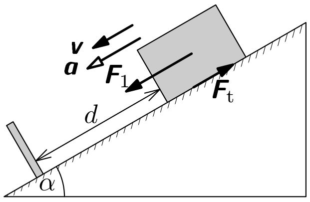


Obr. 14

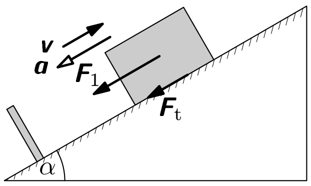
Příklad 4 – nakloněná rovina pokrytá srstí

Mějme těleso na nakloněné rovině, která svírá s vodorovným směrem úhel α a dole je opatřena zarážkou. Při pohybu dolů má součinitel smykového tření hodnotu f_1, při pohybu nahoru f_2 (to může být realizováno tak, že nakloněná rovina je pokryta kraví srstí). Počáteční vzdálenost tělesa od zarážky označme d.

Určete, za jak dlouho po odrazu od zarážky se těleso zastaví, pokud je jeho počáteční rychlost nulová a odraz je dokonale pružný. Předpokládejte, že klidové tření je dostatečně malé, aby se těleso začalo pohybovat.



Obr. 15



Obr. 16

Řešení

Řešení příkladu rozdělíme na dvě části. V první části vyřešíme pohyb směrem dolů po nakloněné rovině a ve druhé pohyb nahoru po odrazu od zarážky. Výpočet si zkrátíme tím, že použijeme výsledky příkladu 3.

Začneme nakreslením obrázku (obr. 15). Z předchozího příkladu víme, že se těleso začne podle (16) pohybovat dolů se zrychlením

$$a = g \sin\alpha - f_1 g \cos\alpha \,.$$

Pohyb směrem dolů popisují vztahy (18) a (19), pokud za f dosadíme f_1. Bude nás teď zajímat rychlost, se kterou těleso narazí na zarážku. Podle předpokladu příkladu se totiž těleso odrazí stejnou rychlostí zpět, tím tedy zjistíme jeho počáteční rychlost pro pohyb nahoru. Protože při nárazu je $s = d$, dostaneme ze (19) pro dobu do nárazu

$$t_1 = \sqrt{\frac{2d}{g(\sin\alpha - f_1 \cos\alpha)}} \,.$$

Dosadíme-li tento vztah do (18), obdržíme rychlost nárazu

$$v_1 = at_1 = \sqrt{2gd(\sin\alpha - f_1 \cos\alpha)} \,.$$

Po odrazu se situace změní (viz obr. 16). Těleso bude při pohybu nahoru rovnoměrně zpomalovat se zrychlením (20), pokud za f dosadíme f_2

$$a = g \sin \alpha + f_2 g \cos \alpha \, .$$

Těleso bude zpomalovat dokud se nezastaví, tedy dokud nebude rychlost tělesa nulová. Ze vztahu (1) můžeme tento okamžik určit, když dosadíme za v_0 počáteční rychlost v_1 a za a právě vypočítané zrychlení. Pro dobu do zastavení t_2 bude platit

$$0 = v = v_1 - a t_2 \quad \Rightarrow \quad t_2 = \frac{v_1}{a} = \frac{\sqrt{2gd(\sin \alpha - f_1 \cos \alpha)}}{g \sin \alpha + f_2 g \cos \alpha} \, .$$

Celková doba pohybu je potom dána součtem $t = t_1 + t_2$.

Možná se vám zdá tento příklad složitý. Uvědomte si však, že jsme při výpočtu nepoužili nic víc, než v prvním příkladě. Opět jsme rozepsali všechny působící síly, vypočítali zrychlení, rychlost a dráhu. V těchto typech úloh proto není potřeba téměř nic složitého vymýšlet, ale řídit se pouze uvedeným postupem výpočtu.

2.2 Kladky

V další části našeho textu se budeme zabývat soustavami hmotných těles a kladek spojenými svislými vlákny a zavěšenými u stropu. Ve všech příkladech budeme kladky a vlákna považovat za ideální. Kladky budou nehmotné a budou se moci otáčet bez tření. Vlákna budou také nehmotná a navíc nepružná. Velikost tahové síly napínající vlákno bude tedy po celé jeho délce stejná. Rozlišujeme dva typy kladek:

a) *pevné* – uchycené pevně ke stropu,
b) *volné* – zavěšené na svislých vláknech; jejich střed se může pohybovat ve svislém směru.

Naším úkolem bude nalézt zrychlení všech těles a tahové síly vláken. Pokusme se ukázat, jakým způsobem se má tento typ úloh řešit. Na začátku si zformulujeme postup řešení.

1. Nakreslíme obrázek soustavy. Označíme v něm volné a pevné kladky. Hmotnosti těles budeme značit m, do obrázku zakreslíme všechny tíhové síly $\boldsymbol{F}_G$ působící na tělesa. Vzájemné působení těles a kladek se uskutečňuje pomocí vláken a je popsáno tahovými silami. Tahová síla vlákna působí vždy směrem od tělesa a její velikost je pro obě spojená tělesa stejná. Tahové síly budeme značit $\boldsymbol{T}$. Všechny tahové síly vláken působící na tělesa a volné kladky vyznačíme do obrázku.

2. Do obrázku dále zakreslíme zrychlení každého tělesa $\boldsymbol{a}$, jejich směr odhadneme. Rovněž středu každé volné kladky přiřadíme zrychlení $\boldsymbol{a}_\mathrm{k}$.
3. Úlohu řešíme tak, že pro každé těleso napíšeme pohybovou rovnici pro svislou souřadnici zrychlení a tělesa

$$ma = \sum F\,, \tag{21}$$

kde $\sum F$ je souřadnice výslednice sil působících na těleso. Určíme ji jako součet velikostí sil, přičemž síly, které působí ve stejném směru jako předpokládáný směr $\boldsymbol{a}$ zakreslený na obrázku, vystupují v součtu s kladným znaménkem, naopak síly, které působí proti směru $\boldsymbol{a}$, píšeme se záporným znaménkem. Síly, které na těleso působí, máme zakreslené v obrázku – jedná se o tíhovou sílu a o tahové síly.
4. Jelikož je kladka nehmotná, musí být vyslednice sil, které na ni působí, nulová. Jinak by se kladka pohybovala s nekonečně velkým zrychlením. Pro každou volnou kladku proto píšeme rovnici, která vyjadřuje, že vektorový součet tahových sil působících na kladku je nulový.
5. Nakonec ještě napíšeme rovnici pro každé vlákno, která vyjadřuje, že vlákno je nepružné. Vlákno spojuje buď dvě tělesa, nebo těleso a střed kladky, nebo středy dvou kladek a nebo je jeho konec pevně upevněn. Při sestavování rovnice vlákna vycházíme z následujících tří pravidel
a) Zrychlení obou konců části vlákna, které není vedeno přes žádnou kladku, mají stejnou velikost i směr.
b) Zrychlení částí vlákna na obou stranách pevné kladky mají stejnou velikost a opačný směr.
c) Jestliže na jedné straně volné kladky má vlákno zrychlení $\boldsymbol{a}_1$ a na druhé straně zrychlení $\boldsymbol{a}_2$, pohybuje se střed kladky se zrychlením

$$\boldsymbol{a}_\mathrm{k} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2)\,. \tag{22}$$

V případě, kdy je vlákno vedeno přes n volných kladek, můžeme kombinací těchto vztahů dostat obecnější pravidlo. Zrychlení konců vlákna označme $\boldsymbol{a}_1$ a $\boldsymbol{a}_2$, zrychlení středů volných kladek, přes které je vlákno vedeno, označme $\boldsymbol{a}_{\mathrm{k}1}, \boldsymbol{a}_{\mathrm{k}2}, \ldots, \boldsymbol{a}_{\mathrm{k}n}$. Potom platí

$$a_{\mathrm{k}1} + a_{\mathrm{k}2} + \cdots + a_{\mathrm{k}n} = \frac{1}{2}(a_1 + a_2)\,. \tag{23}$$

Zde je třeba dodržovat tuto dohodu:

– Předpokládaný směr zrychlení volné kladky orientujeme dolů, je-li vlákno vedeno přes volnou kladku horem, a nahoru, je-li vlákno vedeno spodem.
– Předpokládaný směr zrychlení konce vlákna orientujeme dolů, je-li konec vlákna zakončen shora dolů, a nahoru, je-li vlákno zakončeno zdola nahoru. Pevný konec vlákna má ovšem zrychlení nulové.

6. Nyní již máme dostatek rovnic, abychom mohli soustavu vyřešit. Neznámé jsou souřadnice zrychlení těles a kladek a velikosti tahových sil vláken, hmotnosti těles známe. Pokud souřadnice zrychlení vyjde záporná, znamená to, že skutečný směr zrychlení je opačný, než jsme vyznačili na obrázku.

Začneme velmi jednoduchým příkladem, na kterém si ukážeme, jak právě formulovaná pravidla použít.

Příklad 5 – pevná kladka

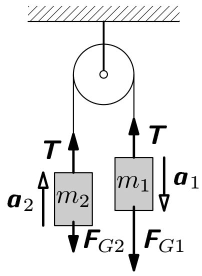
Mějme soustavu dvou těles s kladkou podle obrázku 17, která je na počátku v klidu. Hmotnost prvního tělesa je $m_1 = 2{,}8$ kg, hmotnost druhého je $m_2 = 1{,}3$ kg. Vypočítejte zrychlení těles a sílu, kterou je napínáno vlákno.

Řešení

Do obrázku zakreslíme tíhové, tahové síly a všechna zrychlení (obr. 17). Předpokládáme, že těžší těleso bude klesat a lehčí stoupat, což odpovídá naší zkušenosti. Tahové síly na koncích lana označme $\boldsymbol{T}$. Napišme pohybové rovnice obou těles podle (21), dáváme přitom pozor na znaménka

$$m_1 a_1 = m_1 g - T,$$

$$m_2 a_2 = -m_2 g + T.$$



Obr. 17

V soustavě není žádná volná kladka, přistupme proto rovnou k bodu 5. Pro jediné vlákno, které je vedeno přes pevnou kladku, doplníme soustavu rovnicí

$$\boldsymbol{a}_1 = -\boldsymbol{a}_2.$$

Protože vektory $\boldsymbol{a}_1$ a $\boldsymbol{a}_2$ jsme nakreslili opačným směrem, pro souřadnice platí

$$a_1 = a_2.$$

Máme tak tři rovnice pro tři neznámé a_1, a_2 a T. Vyřešením dostaneme

$$a_1 = a_2 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\, g = 3{,}6\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}, \qquad T = \frac{2m_1 m_2 g}{m_1 + m_2} = 17\ \mathrm{N},$$

Těžší těleso se bude skutečně pohybovat a zrychlovat dolů.

Příklad 6 – volná kladka

Na volné kladce je zavěšeno těleso o hmotnosti $m_2 = 60$ kg. Volný konec vlákna je veden přes pevnou kladku a je na něm zavěšeno těleso o hmotnosti $m_1 = 20$ kg. Vypočítejte zrychlení obou těles a tahovou sílu vlákna.

Řešení

Situace je znázorněna na obrázku 18, ve kterém jsou vyznačeny tíhové a tahové síly $\boldsymbol{T}_1$ a $\boldsymbol{T}_2$. Zrychlení volné kladky jsme označili $\boldsymbol{a}_\mathrm{k}$. Napišme pohybové rovnice pro obě tělesa

$$m_1 a_1 = m_1 g - T_1\,,$$

$$m_2 a_2 = -m_2 g + T_2\,.$$

Rovnováha sil na volné kladce dává

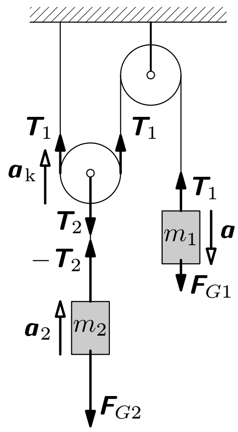
$$2T_1 = T_2\,.$$

Zbývá napsat rovnice pro obě vlákna. Pro první, které je napínáno silou $\boldsymbol{T}_1$, podle (22) platí

$$\boldsymbol{a}_\mathrm{k} = \frac{1}{2}(0 - \boldsymbol{a}_1) \quad \Rightarrow \quad a_\mathrm{k} = \frac{1}{2} a_1$$

a pro druhé vlákno platí

$$\boldsymbol{a}_\mathrm{k} = \boldsymbol{a}_2 \quad \Rightarrow \quad a_\mathrm{k} = a_2\,.$$



Obr. 18

Sestavili jsme pět rovnic pro neznámé a_1, a_2, a_k, T_1 a T_2. Jejich vyřešením obdržíme

$$a_1 = -\frac{2(m_2 - 2m_1)}{4m_1 + m_2}\, g = -2{,}8\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}\,, \quad a_2 = -\frac{m_2 - 2m_1}{4m_1 + m_2}\, g = -1{,}4\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}\,.$$

Obě souřadnice zrychlení vyšly záporné, soustava tedy bude zrychlovat opačným směrem, než jsme předpokládali. Volná kladka s těžším tělesem bude zrychlovat dolů. Vlákno je napínáno silou velikosti

$$T_1 = \frac{3m_1m_2g}{4m_1 + m_2} = 250\ \mathrm{N}\,.$$

Příklad 7 – dvě kladky a tři tělesa

Mějme soustavu se dvěma kladkami, jak je znázorněno na obrázku 19. Hmotnosti těles jsou po řadě m_1, m_2, m_3. Určete zrychlení každého tělesa a tahové síly vláken.

Řešení

Nakreslíme obrázek (obr. 19) a vyznačíme v něm tíhové a tahové síly a předpokládané směry zrychlení těles a volné kladky. Tahové síly ve vláknech označme $\boldsymbol{T}_1$ a $\boldsymbol{T}_2$ podle obrázku, zrychlení volné kladky je $\boldsymbol{a}_\mathrm{k}$. Pokračujme pohybovou rovnicí pro první těleso, na něj působí kromě tíhy tahová síla vlákna $\boldsymbol{T}_1$

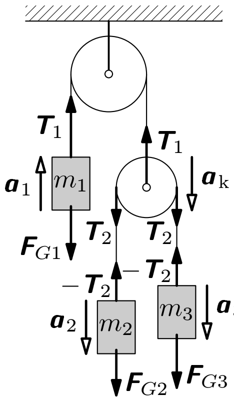
$$m_1a_1 = -m_1g + T_1\,,$$

podobné pohybové rovnice mají i druhé a třetí těleso

$$m_2a_2 = m_2g - T_2\,, \qquad m_3a_3 = m_3g - T_2\,.$$

V soustavě se vyskytuje volná kladka, síly působící na ni musí být v rovnováze

$$T_1 = 2T_2\,.$$



Obr. 19

Druhé a třetí těleso jsou spojeny vláknem, které je vedeno přes volnou kladku, napišme pro něj rovnici dle (22)

$$\boldsymbol{a}_\mathrm{k} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3) \quad \Rightarrow \quad a_\mathrm{k} = \frac{1}{2}(a_2 + a_3)\,.$$

Druhé vlákno, které spojuje první těleso s volnou kladkou, má rovnici

$$\boldsymbol{a}_1 = -\boldsymbol{a}_\mathrm{k} \quad \Rightarrow \quad a_1 = a_\mathrm{k}\,.$$

Dohromady máme šest rovnic pro šest neznámých a_1, a_2, a_3, a_k, T_1 a T_2. Dosazením z posledních dvou rovnic do prvních tří dostaneme

$$\frac{1}{2}m_1(a_2 + a_3) = 2T_2 - m_1g\,, \quad m_2a_2 = m_2g - T_2\,, \quad m_3a_3 = m_3g - T_2\,,$$

z toho

$$a_2 + a_3 = \frac{4T_2}{m_1} - 2g\,, \quad a_2 = g - \frac{T_2}{m_2}\,, \quad a_3 = g - \frac{T_2}{m_3}\,.$$

Odečtením druhé a třetí rovnice od první a úpravou dostaneme

$$T_2 = \frac{T_1}{2} = \frac{4g}{\dfrac{1}{m_2} + \dfrac{1}{m_3} + \dfrac{4}{m_1}}\,.$$

Odtud již snadno po úpravách pro souřadnice zrychlení obdržíme

$$a_1 = a_\mathrm{k} = \frac{8g}{4 + \dfrac{m_1}{m_2} + \dfrac{m_1}{m_3}} - g\,,$$

$$a_2 = g - \frac{4g}{1 + \dfrac{m_2}{m_3} + 4\dfrac{m_2}{m_1}}\,, \qquad a_3 = g - \frac{4g}{1 + \dfrac{m_3}{m_2} + 4\dfrac{m_3}{m_1}}\,.$$

Vidíme, že i řešení příkladů s kladkami je více méně mechanická záležitost. Pokud dodržíme všechna pravidla výpočtu, která jsme formulovali na začátku, musíme dojít ke správnému výsledku.

2.3 Soustavy s nakloněnou rovinou a spojené vláknem

V poslední kapitole našeho výkladu spojíme nově nabyté znalosti dohromady. Budeme totiž řešit nakloněné roviny, na nichž jsou umístěny kladky. Protože všechna potřebná pravidla k výpočtu již byla řečena, přejdeme hned k příkladům.

Příklad 8 – nakloněná rovina s kladkou

Mějme soustavu zobrazenou na obrázku 20. Rozhodněte, jakým směrem se bude soustava pohybovat za předpokladu, že byla na počátku v klidu, pokud znáte hmotnosti m_1, m_2 a úhel mezi nakloněnou a vodorovnou rovinou α. Třecí síla je malá, proto neumusíte tření uvažovat.

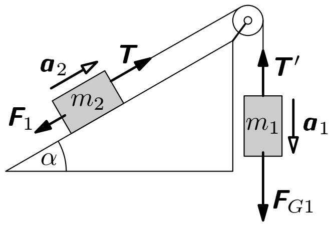
Řešení

Zvolme směr $\boldsymbol{a}_1$ a $\boldsymbol{a}_2$ podle obrázku 20. Do obrázku pro zjednodušení zakreslíme jen ty síly, které mají pohybový účinek – tíhovou sílu $\boldsymbol{F}_{G1}$ působící na visící těleso a sílu $\boldsymbol{F}_1$, což je pohybová složka (rovnoběžná s nakloněnou rovinou) tíhové síly $\boldsymbol{F}_{G2}$ působící na ležící těleso. Tahové síly působící na koncích vlákna označíme $\boldsymbol{T}$ a $\boldsymbol{T}'$, podle (8) musí platit $T = T'$. Nyní můžeme napsat pohybové rovnice pro obě tělesa a rovnici vlákna

$$m_1 a_1 = m_1 g - T\,,$$

$$m_2 a_2 = -m_2 g \sin\alpha + T\,,$$

$$a_1 = a_2\,.$$



Obr. 20

Opět se jedná o soustavu tří rovnic o třech neznámých a_1, a_2, T. Pro souřadnice zrychlení dostaneme

$$a_1 = a_2 = \frac{m_1 - m_2 \sin\alpha}{m_1 + m_2}\, g\,.$$

Soustava se bude pohybovat označeným směrem, pokud bude $a_1 > 0$, neboli

$$\frac{m_1 g - m_2 g \sin\alpha}{m_1 + m_2} > 0 \quad \Rightarrow \quad m_1 > m_2 \sin\alpha\,.$$

Pokud platí $m_1 < m_2 \sin\alpha$, bude se soustava pohybovat opačným směrem. V případě rovnosti $m_1 = m_2 \sin\alpha$ zůstane soustava v klidu.

Na závěr spojme všechny naše znalosti a vyřešme následující dva příklady.

Příklad 9 – dvě nakloněné roviny

Mějme soustavu dvou stejných těles spojených vláknem na dvou k sobě kolmých nakloněných rovinách (viz obr. 21). Známe hmotnosti těles m a úhel $\alpha < 45°$.

a) Rozhodněte, pro jakou hodnotu součinitele klidového tření f_0 zůstane soustava v klidu.

b) Určete, s jakým zrychlením se dá soustava do pohybu, není-li splněna podmínka v úkolu a).

Řešení

Pokud řešíme složitější soustavy, nemusí být na první pohled jasné, jaký směr mají klidové třecí síly. Na tomto příkladě si ukážeme jak postupovat.

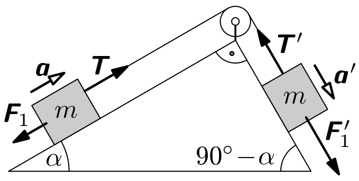
Budeme uvažovat, že soustava je na počátku v klidu a nepůsobí na ni žádné třecí síly. Nakreslíme obrázek (obr. 21) a zakreslíme do něj pro zjednodušení pouze síly s pohybovým účinkem. Jedná se o složky tíhových sil $\boldsymbol{F}_1$ a $\boldsymbol{F}_1'$ rovnoběžné s nakloněnou rovinou, tahové síly $\boldsymbol{T}$ a $\boldsymbol{T}'$ (platí $T = T'$). Dále do obrázku zakreslíme předpokládané směry zrychlení těles. Napišme pohybové rovnice pro první a druhé těleso (využijeme vztahu $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha$) a rovnici pro vlákno

$$ma = -F_1 + T = -mg\sin\alpha + T\,,$$
$$ma' = F_1' - T' = mg\cos\alpha - T\,,$$
$$a = a'\,.$$

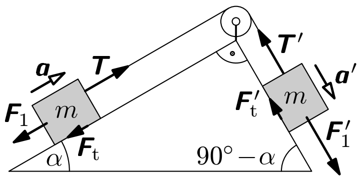
Vyřešením soustavy dostaneme

$$a = a' = \frac{1}{2}(\cos\alpha - \sin\alpha) > 0\,.$$

Souřadnice zrychlení a je kladná, protože $\alpha < 45^\circ$. Zrychlení má tedy předpokládaný směr podle obrázku, soustava se bude pohybovat doprava (pokud by nám souřadnice zrychlení vyšla záporná, pohybovala by se doleva, a pokud by vyšla nulová, soustava by byla v rovnováze).



Obr. 21



Obr. 22

a) Nyní již víme, jakým směrem se má soustava tendenci pohybovat, a můžeme podle toho do obrázku (obr. 22) zakreslit třecí síly. Vyšetříme, kdy zůstane soustava v klidu. Pišme proto rovnice silové rovnováhy pro obě tělesa

$$0 = -mg\sin\alpha + T - F_\mathrm{t}\,,$$
$$0 = mg\cos\alpha - T - F_\mathrm{t}'\,.$$

Pro klidovou třecí sílu platí (7), sečtením obou rovnic dostaneme

$$mg(\cos\alpha - \sin\alpha) = F_\mathrm{t} + F_\mathrm{t}' \leq f_0(N + N') = f_0 mg(\cos\alpha + \sin\alpha)\,,$$

odtud obdržíme hledanou podmínku

$$f_0 \geq \frac{\cos\alpha - \sin\alpha}{\cos\alpha + \sin\alpha}\,.$$

b) Soustava se dá do pohybu doprava, třecí síly mají stejný směr jako v klidu, můžeme tak opět využít obrázek 22. Pohybové rovnice jsou (platí $a' = a$)

$$ma = -mg\cos\alpha + T - fmg\sin\alpha\,,$$

$$ma = mg\sin\alpha - T - fmg\cos\alpha\,.$$

Vyřešením dostaneme vztah pro souřadnici zrychlení

$$a = \frac{1}{2}\left[g(\cos\alpha - \sin\alpha) - fg(\cos\alpha + \sin\alpha)\right]\,.$$

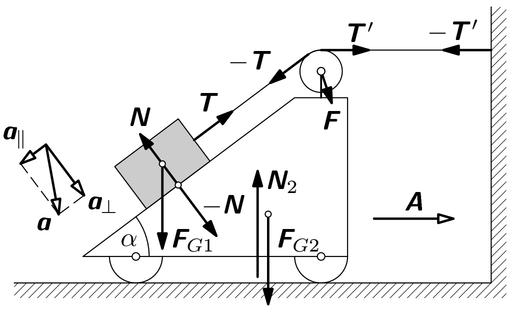
Protože

$$f < f_0 < \frac{\cos\alpha - \sin\alpha}{\cos\alpha + \sin\alpha}$$

je $a > 0$, soustava bude skutečně zrychlovat doprava. Sami si můžete rozmyslet pohyb soustavy, pokud ji udělíme počáteční rychlost doleva.

Příklad 10 – kvádr na klínu

Na obrázku 23 je soustava dvou těles. Kvádr o hmotnosti m, který je přivázán ke zdi ideálním lanem, leží v klidu na klínu o hmotnosti M. Tření mezi tělesy je nulové, klín je opatřen kolečky a pohybuje se bez odporu, kladka je nehmotná a otáčí se bez tření. Určete zrychlení klínu.



Obr. 23

Řešení

Začněme tím, že popíšeme všechny síly, které na vozík ve tvaru klínu a na kvádr působí. Síly jsou znázorněny na obrázku 23. Na kvádr působí tíhové pole silou $\boldsymbol{F}_{G1}$, vozík normálovou silou $\boldsymbol{N}$ a lano tahovou silou $\boldsymbol{T}$. Podle zákona akce a reakce bude kvádr působit na vozík silou $-\boldsymbol{N}$. Dále na vozík působí tíhové pole silou $\boldsymbol{F}_{G2}$, podložka, po které vozík jezdí, normálovou silou $\boldsymbol{N}_2$ a konečně lano silou $\boldsymbol{F}$. Síla $\boldsymbol{F}$ vzniká v důsledku ohybu lana na kladce.

Přistupme nyní k sestavení pohybových rovnic. Zrychlení kvádru označme $\boldsymbol{a}$ a zrychlení vozíku $\boldsymbol{A}$. Pohybové rovnice pro kvádr ve směru rovnoběžném s nakloněnou rovinou resp. ve směru kolmém k nakloněné rovině jsou

$$ma_{\parallel} = mg\sin\alpha - T\,,$$

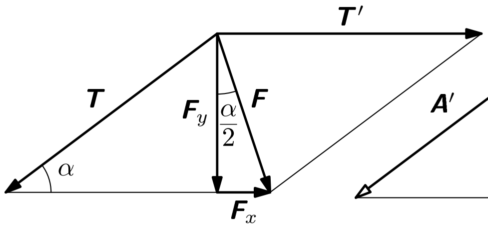
$$ma_{\perp} = mg\cos\alpha - N\,.$$

Zde je nutné si uvědomit, že $a_{\perp} \neq 0$, protože se klín může volně pohybovat narozdíl od pevné nakloněné roviny. Pro klín napíšeme jen jednu pohybovou rovnici, a to ve vodorovném směru, neboť ve svislém směru se nepohybuje

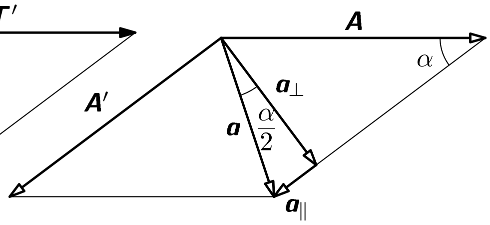
$$MA = N\sin\alpha + F_x\,,$$

kde F_x značí velikost vodorovné složky síly $\boldsymbol{F}$. Ve vodorovném směru dle obr. 24 dostáváme

$$F_x = T(1-\cos\alpha)\,.$$



Obr. 24



Obr. 25

Nyní se dostáváme k obtížnější části řešení příkladu. Máme zatím čtyři rovnice pro šest neznámých $a_{\parallel}$, $a_{\perp}$, A, N, T a F_x. Budeme k nim proto muset přidat další dvě rovnice, které dostaneme z vazbových podmínek pro pohyb kvádru. Pokud je hmotnost klínu výrazně větší než hmotnost kvádru, leží kvádr stále na klínu. Pohyb kvádru se tak skládá z pohybu klínu a pohybu konce lana, který se vzdaluje od kladky, jak se vozík přibližuje ke stěně. Vozík se pohybuje ke stěně se zrychlením $\boldsymbol{A}$. Protože je délka lana konstantní, vzdaluje se kvádr od kladky se zrychlením $\boldsymbol{A}'$ stejné velikosti. Podle obr. 25 bude tedy platit

$$a_{\parallel} = A - A\cos\alpha\,,$$

neboť od velikosti zrychlení A, se kterým se kvádr vzdaluje od kladky, musíme odečíst průmět zrychlení vozíku do směru $a_{\parallel}$. Podobně $a_{\perp}$ je dáno průmětem zrychlení vozíku do směru kolmého na nakloněnou rovinu

$$a_{\perp} = A\sin\alpha\,.$$

Soustavu šesti rovnic pro šest neznámých můžeme přepsat na soustavu tří rovnic

$$mA(1 - \cos\alpha) = mg\sin\alpha - T\,,$$

$$mA\sin\alpha = mg\cos\alpha - N\,,$$

$$MA = N\sin\alpha + T(1 - \cos\alpha)\,.$$

Vyřešení této soustavy pro A, N a T je jen otázkou běžných matematických výpočtů, proto je nebudeme uvádět. Vychází

$$A = \frac{mg\sin\alpha}{M + 2m(1 - \cos\alpha)}\,,$$

což je hledaná velikost zrychlení vozíku. Velikosti normálové síly a tahové síly, které působí na kvádr, jsou

$$N = mg\cos\alpha - \frac{m^2 g\sin^2\alpha}{M + 2m(1 - \cos\alpha)}\,,$$

$$T = \frac{mg(M + m(1 - \cos\alpha))\sin\alpha}{M + 2m(1 - \cos\alpha)}\,.$$

3 Úlohy

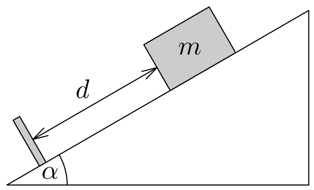
1. Periodický pohyb

Těleso o hmotnosti $m = 0{,}20$ kg leží na nakloněné rovině ve vzdálenosti $d = 0{,}50$ m od zarážky (viz obr. 26). Vypočítejte periodu jeho pohybu, je-li $\alpha = 30°$. Předpokládejte, že odraz je dokonale pružný a tření neuvažujeme, neboť třecí síla je malá.

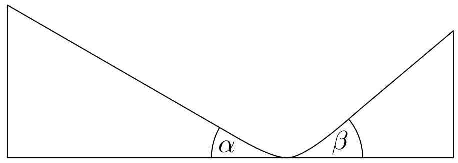
2. Dojezd na rovinu

Lyžař sjíždí kopec o výšce $h = 10$ m a úhlu stoupání $\alpha = 15°$. Součinitel smykového tření mezi lyží a sněhem je $f = 0{,}10$.

a) Určete lyžařovu rychlost při přejezdu na vodorovnou rovinu.
b) Vypočítejte, jak daleko lyžař dojede na vodorovné rovině, než zastaví.



Obr. 26: K úloze 1



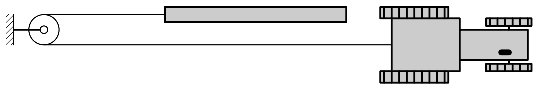
Obr. 27: K úloze 3

3. Dvě roviny

Mějme dvě nakloněné roviny. První má úhel sklonu $\alpha = 30°$, druhá $\beta = 40°$. Malé těleso se na začátku nachází ve výšce $h = 5{,}0$ m na druhé nakloněné rovině. Vypočítejte, za jak dlouho se těleso opět dostane do počáteční polohy. Tření je malé, proto ho nemusíte uvažovat, přechod mezi nakloněnými rovinami je plynulý.

4. Přibližování kmenů

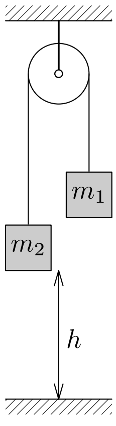
Pokácené kmeny lesních stromů byly přibližovány k cestě traktorem. Vzhledem k lesnímu porostu bylo nutno použít pevné kladky podle náčrtku na obr. 28. Určete velikost tahové síly F traktoru, je-li hmotnost kmenu $m_2 = 200$ kg, hmotnost traktoru $m_1 = 3000$ kg a při rozjíždění udělil traktor kmenu zrychlení $g/20$. Třecí síla působící na kmen má velikost 800 N.



Obr. 28: K úloze 4

5. Pád těles na pevné kladce

Uvažujte dvě kostky zavěšené na pevné kladce podle obr. 29. První z nich má hmotnost $m_1 = 1{,}0$ kg, druhá má hmotnost $m_2 = 1{,}1$ kg. Vypočítejte, za jak dlouho se druhá kostka dotkne země, je-li její počáteční výška nad zemí $h = 1{,}0$ m.



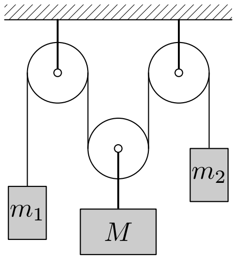
Obr. 29: K úloze 5

6. Dvě pevné kladky

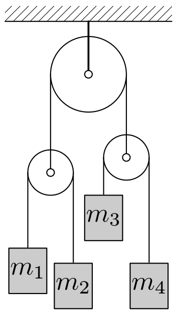
Mějme soustavu tří kladek podle obr. 30, která je na počátku v klidu. Určete zrychlení všech tří těles a tahovou sílu vlákna. U všech těles také určete směr pohybu. Hmotnosti těles jsou $m_1 = 1{,}0$ kg, $m_2 = 2{,}0$ kg a $M = 5{,}0$ kg.

7. Dvě volné kladky

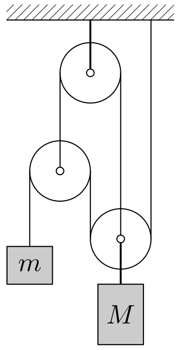
Uvažujte soustavu kladek podle obr. 31, která je obtížnější variantou příkladu 7. Určete zrychlení všech čtyř těles a tahové síly vláken.



Obr. 30: K úloze 6



Obr. 31: K úloze 7



Obr. 32: K úloze 8

8. Zamotané kladky

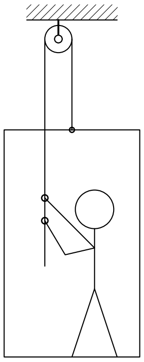
Prostudujte si soustavu na obr. 32.

a) Visí-li na levém konci lana závaží o hmotnosti m, vypočítejte zrychlení tělesa o hmotnosti M.

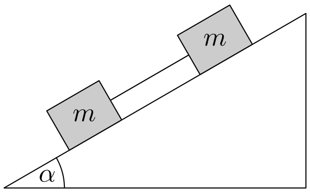
b) Určete hmotnost pravého závaží M, které udrží v klidu levé závaží o hmotnosti $m = 10$ kg.

9. Výtah na ruční pohon

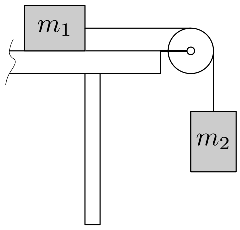
Mějme výtah o hmotnosti M, který je pověšen na laně přes pevnou kladku. Za druhý konec lana tahá silou o velikosti F člověk, který stojí v onom výtahu. Jeho hmotnost je m. Určete zrychlení výtahu.



Obr. 33: K úloze 9



Obr. 34: K úloze 10



Obr. 35: K úloze 11

10. Spojená tělesa

Na nakloněné rovině jsou dvě tělesa o hmotnosti $m = 2{,}0$ kg spojená vláknem. Součinitel klidového a smykového tření mezi dolním, resp. horním tělesem a nakloněnou rovinou je $f_{01} = 0{,}30$ a $f_1 = 0{,}20$, resp. $f_{02} = 0{,}50$ a $f_2 = 0{,}40$.

a) Co musí platit pro sklon nakloněné roviny α, aby se soustava sama dala do pohybu?
b) Určete zrychlení soustavy, je-li $\alpha = 30°$.
c) Určete velikost tahové síly vlákna T pro stejný sklon nakloněné roviny jako v b).

11. Na hraně stolu

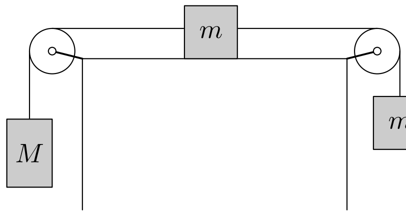
Těleso, které leží na stole, je přes kladku spojeno s tělesem, které volně visí. Hmotnost prvního tělesa je m_1, hmotnost druhého je m_2 a součinitel klidového a smykového tření mezi prvním tělesem a stolem je f_0 a f.

a) Rozhodněte, pro jaké hodnoty f_0 se soustava sama začne pohybovat.
b) Určete zrychlení soustavy.

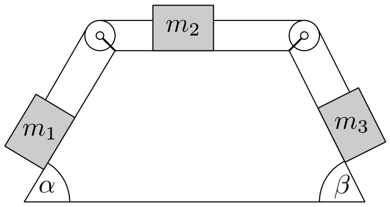
12. Kvádr a dvě krychle

Máme dánu soustavu podle obr. 36, která je na počátku v klidu. Součinitel klidového tření mezi stolem a krychlí je f_0. Určete, jakou hmotnost M

musí visící kvádr, aby se soustava začala pohybovat na jeho stranu, pokud zbývající dvě krychle mají hmotnost m.



Obr. 36: K úloze 12



Obr. 37: K úloze 13

13. Pohyb soustavy se třením

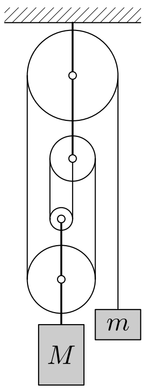
Na obrázku 37 je znázorněna soustava tří těles, která se na počátku pohybuje zprava doleva. Určete její zrychlení a tahové síly vláken při hmotnostech těles

a) $m_1 = 5{,}0$ t, $m_2 = 2{,}0$ t, $m_3 = 1{,}0$ t
b) $m_1 = 15{,}0$ t, $m_2 = 2{,}0$ t, $m_3 = 1{,}0$ t
a hodnotě součinitele smykového tření $f = 0{,}60$. Nakloněné roviny mají sklon $\alpha = 40°$, $\beta = 50°$.

14. Kladkostroj

Na obrázku 38 je náčrtek kladkostroje, kde $m = 5{,}0$ kg a $M = 30$ kg.

a) Určete směr a velikost zrychlení obou těles a tahovou sílu vlákna.
b) Jaký musí být poměr hmotností těles M/m, aby se soustava po počátečním impulsu pohybovala bez zrychlení?



Obr. 38: K úloze 14

Výsledky úloh

1. Perioda pohybu je

$$T = 2\sqrt{\frac{2d}{g\sin\alpha}} = 0{,}90\ \mathrm{s}\,.$$

2. a) Na konci svahu dosáhne lyžař rychlosti

$$v = \sqrt{\frac{2hg(\sin\alpha - f\cos\alpha)}{\sin\alpha}} = 11\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}} = 40\ \mathrm{km/h}\,.$$

b) A na rovině dojede do vzdálenosti

$$s = \frac{h(\sin\alpha - f\cos\alpha)}{f\sin\alpha} = 63\ \mathrm{m}\,.$$

3. Těleso se dostane do počáteční polohy za dobu

$$t = 2\sqrt{\frac{2h}{g}}\left(\frac{1}{\sin\alpha} + \frac{1}{\sin\beta}\right) = 7{,}2\ \mathrm{s}\,.$$

4. Označíme-li a velikost zrychlení traktoru, dostaneme

$$F = (m_1 + m_2)a + F_\mathrm{t} = 2400\ \mathrm{N}\,.$$

5. Země se dotke kostka o hmotnosti m_2 za dobu

$$t = \sqrt{\frac{2h(m_1 + m_2)}{g(m_2 - m_1)}} = 2{,}1\ \mathrm{s}\,.$$

6. Zrychlení všech těles orientujeme dolů, pro jejich souřadnice pak vychází

$$a_1 = g - \frac{4g}{1 + \dfrac{m_1}{m_2} + 4\dfrac{m_1}{M}} = -\frac{17}{23}\,g\,, \quad a_2 = g - \frac{4g}{1 + \dfrac{m_2}{m_1} + 4\dfrac{m_2}{M}} = \frac{3}{23}\,g\,,$$

prostřední těleso má souřadnici zrychlení

$$A = g - \frac{8g}{4 + \dfrac{M}{m_1} + \dfrac{M}{m_2}} = \frac{7}{23}\,g\,.$$

Tělesa o hmotnostech m_2 a M se budou pohybovat dolů, těleso o hmotnosti m_1 se bude pohybovat nahoru. Tahová síla vlákna má velikost

$$T = \frac{4g}{\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \frac{4}{M}} = 17\ \mathrm{N}\,.$$

Porovnáme-li tyto výsledky s výsledky, ke kterým jsme došli v příkladu 7, zjistíme, že jsou stejné. Soustavy na obrázcích 19 a 30 jsou tudíž ekvivalentní (tělesa o hmotnostech m_1, m_2 a m_3 na obr. 19 odpovídají tělesům o hmotnostech M, m_1 a m_2 na obr. 30). Napišme si ještě obecné podmínky pro pohyb těles. Těleso o hmotnosti m_1 se bude pohybovat dolů, pokud

$$m_1 > \frac{3m_2M}{4m_2 + M}\,,$$

těleso o hmotnosti m_2 se bude pohybovat dolů, pokud

$$m_2 > \frac{3m_1M}{4m_1 + M}\,,$$

a prostřední těleso se bude pohybovat dolů, pokud

$$M > \frac{4m_1m_2}{m_1 + m_2}\,.$$

7. Tahovou sílu levého vlákna označme $\boldsymbol{T}_1$, tahovou sílu pravého vlákna $\boldsymbol{T}_2$ a tahovou sílu vlákna vedeného přes pevnou kladku označme $\boldsymbol{T}$. Zrychlení všech těles orientujme dolů. Dostáváme

$$a_1 = g - \frac{4g}{1 + \frac{m_1}{m_2} + \frac{m_1}{m_3} + \frac{m_1}{m_4}}\,, \quad a_2 = g - \frac{4g}{1 + \frac{m_2}{m_1} + \frac{m_2}{m_3} + \frac{m_2}{m_4}}\,,$$

$$a_3 = g - \frac{4g}{1 + \frac{m_3}{m_1} + \frac{m_3}{m_2} + \frac{m_3}{m_4}}\,, \quad a_4 = g - \frac{4g}{1 + \frac{m_4}{m_1} + \frac{m_4}{m_3} + \frac{m_4}{m_3}}\,.$$

Tahové síly mají velikosti

$$T = 2T_1 = 2T_2 = \frac{8g}{\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3} + \frac{1}{m_4}}\,.$$

8. a) Velikost tahové síly vlákna, na kterém visí těleso o hmotnosti m, označíme T_1, velikost tahové síly druhého vlákna označíme T_2, zrychlení levého tělesa je $\boldsymbol{a}_1$, pravého tělesa (a pravé volné kladky) $\boldsymbol{a}_2$ a levé volné kladky $\boldsymbol{a}_\mathrm{k}$ (viz obr. 39). Pohybové rovnice obou těles, rovnice rovnováhy sil na volné kladce a rovnice obou vláken jsou

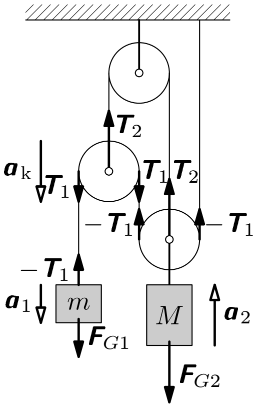
$$ma_1 = mg - T_1\,,$$

$$Ma_2 = -Mg + 2T_1 + T_2\,,$$

$$2T_1 = T_2\,,$$

$$a_\mathrm{k} + a_2 = \frac{1}{2}a_1\,,$$

$$a_\mathrm{k} = a_2\,.$$



Obr. 39

Řešením této soustavy dostáváme

$$a_2 = \frac{4m - M}{M + 16m}\,g\,.$$

b) Soustava bude v rovnovážném stavu, pokud

$$M = 4m = 40\ \mathrm{kg}\,.$$

9. Na člověka a na výtah působí směrem dolů tíhová síla o velikosti

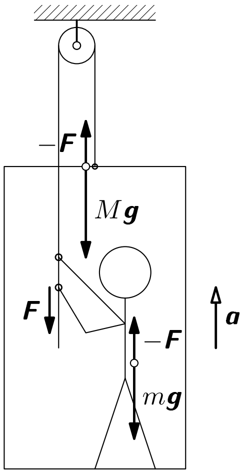
$$F_G = (M + m)g\,.$$

Nahoru působí síla o velikosti $2F$ (lano tahá kabinu silou velikosti F, na člověka působí reakce o velikosti F). Napišme si pohybovou rovnici výtahu (zrychlení orientujeme nahoru)

$$(M + m)a = 2F - (M + m)g\,,$$

odtud dostáváme

$$a = \frac{2F}{M + m} - g\,.$$



Obr. 40

10. a) Soustava se sama dá do pohybu, pokud pro sklon roviny platí

$$\operatorname{tg}\alpha > \frac{f_{01} + f_{02}}{2} \quad \Rightarrow \quad \alpha > 22°.$$

b) Soustava zrychluje dolů po nakloněné rovině, velikost zrychlení je

$$a = \frac{1}{2}(2\sin\alpha - (f_1 + f_2)\cos\alpha)g = 2{,}4\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}.$$

c) Tahová síla vlákna má velikost

$$T = \frac{1}{2}mg(f_2 - f_1)\cos\alpha = 1{,}7\ \mathrm{N}\,.$$

11. a) Soustava se začne pohybovat za předpokladu, že

$$f_0 < \frac{m_2}{m_1}\,.$$

b) Visící těleso zrychluje dolů, velikost zrychlení soustavy je

$$a = \frac{m_2 - m_1 f}{m_1 + m_2}\,g\,.$$

12. Kvádr musí mít hmotnost

$$M > m(1 + f_0)\,.$$

13. a) Velikost tahové síly levého resp. pravého vlákna označme T_1 resp. T_2. Zrychlení soustavy $\boldsymbol{a}$ orientujeme ve směru pohybu. Vychází

$$a = \frac{m_1(\sin\alpha - f\cos\alpha) - m_2 f - m_3(\sin\beta + f\cos\beta)}{m_1 + m_2 + m_3}\,g\,,$$

$$T_1 = \frac{m_1 m_3 g(\sin\alpha - f\cos\alpha + \sin\beta + f\cos\beta)}{m_1 + m_2 + m_3} + \\ + \frac{m_1 m_2 g(\sin\alpha - f\cos\alpha + f)}{m_1 + m_2 + m_3}\,,$$

$$T_2 = \frac{m_1 m_3 g(\sin\alpha - f\cos\alpha + \sin\beta + f\cos\beta)}{m_1 + m_2 + m_3} + \\ + \frac{m_2 m_3 g(\sin\beta + f\cos\beta - f)}{m_1 + m_2 + m_3}\,,$$

po číselném dosazení

$$a = -1{,}76\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}, \quad T_1 = 17{,}8\ \mathrm{kN}\,, \quad T_2 = 9{,}5\ \mathrm{kN}\,.$$

Soustava tedy bude zpomalovat až do té doby, než zastaví.

b) Po číselném dosazení

$$a = 0{,}22\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}, \quad T_1 = 23{,}7\ \mathrm{kN}\,, \quad T_2 = 11{,}5\ \mathrm{kN}\,.$$

Soustava bude zrychlovat.

14. a) Zrychlení $\boldsymbol{A}$ tělesa o hmotnosti M orientujeme dolů a zrychlení $\boldsymbol{a}$ tělesa o hmotnosti m orientuje nahoru. Potom pro souřadnice platí

$$a = 4A = \frac{4(M-4m)}{16m+M}\, g = 3{,}6\ \mathrm{m \cdot s^{-2}},$$

tahová síla vlákna je

$$T = \frac{5mMg}{16m+M} = 67\ \mathrm{N}\,.$$

Těleso o hmotnosti M bude zrychlovat směrem dolů, druhé těleso bude zrychlovat nahoru.

b) Soustava bude v rovnovážném stavu, pokud

$$M/m = 4\,.$$

Literatura

[1] Bednařík, M., Široká, M.: *Fyzika pro gymnázia – Mechanika.* 3. vydání, Prometheus, Praha 2001.

[2] Halliday, D., Resnick, R., Walker, J.: *Fyzika, část 1 – Mechanika.* Vydání první, VUT Brno – nakladatelství VUTIUM, Brno 2000.

[3] Kružík, M.: *Sbírka úloh z fyziky.* 3. vydání, SPN, Praha 1978.

[4] *Ročenky Fyzikálního korespondenčního semináře Fykos z let 1994–2004.* Vyd. MFF UK, Praha 1995–2004.

[5] Štoll, I.: *Svět očima fyziky.* Prometheus, Praha 1996.

[6] Vybíral, B.: *Kinematika a dynamika tuhého tělesa.* Knihovnička FO č. 31. MAFY, Hradec Králové 1997.

[7] Vybíral, B., Zdeborová, L.: *Odporové síly.* Knihovnička FO č. 48. MAFY, Hradec Králové 2001.