ÚLOHY Z MECHANIKY II
Otáčení tuhého tělesa

Studijní text pro řešitele FO kategorie C a ostatní zájemce o fyziku

Jan Prachař a Jaroslav Trnka

Obsah

Úvod **3**

1 Soustavy částic **3**
1.1 Těžiště 3
Příklad 1 – kruhová deska s otvorem 4
1.2 První impulzová věta 5
Příklad 2 – exploze střely 6

2 Otáčení tuhého tělesa **8**
2.1 Veličiny popisující otáčení 8
2.2 Moment setrvačnosti 11
Příklad 3 – moment setrvačnosti čtverce 11
2.3 Moment síly 12
2.4 Druhá impulzová věta 13
2.5 Kinetická energie otáčení tuhého tělesa 13
Příklad 4 – roztáčení setrvačníku 14
2.6 Srovnání posuvného aotáčivého pohybu 14

3 Mechanické soustavy, jejichž části konají otáčivý pohyb **16**
3.1 Nakloněná rovina 16
Příklad 5 – valení po nakloněné rovině 17
Příklad 6 – válec a kvádr na nakloněné rovině 20
3.2 Hmotné kladky 23
Příklad 7 – pevná kladka 25
Příklad 8 – volná kladka 26
3.3 Další příklady 27
Příklad 9 – jojo 28
Příklad 10 – koule na hraně 28
Příklad 11 – válec, kladka a špulka 30

4 Úlohy **33**

Výsledky úloh **35**

Literatura **36**

Úvod

Dostáváte do rukou druhou část studijního textu Úlohy z mechaniky. Výklad přirozeně navazuje na první díl [3] a rovněž vychází ze znalosti učiva učebnice [1]. Text se snaží systematicky a v úsporně naučit řešit jednodušší úlohy o otáčejících se tělesech podobné těm, které jsou zadávány v jednotlivých kolech Fyzikální olympiády.

V první kapitole si zopakujeme pojem těžiště soustavy částic a zformulujeme zákon pro pohyb těžiště. V další kapitole se již zabýváme popisem otáčivého pohybu a zákony, které pro něj platí za jistých zjednodušujících předpokladů. V poslední kapitole řešíme různé příklady o soustavách, jejichž části konají otáčivé pohyby. Doufáme, že právě nad ukázkou řešení některých úloh lépe pochopíte obecný postup, který je platný při řešení takovýchto úloh – tj. systematicky sestavit pohybové rovnice pro jednotlivá tělesa soustavy a vazebné rovnice, které svazují pohyb částí soustavy.

Na konci textu najdete úlohy k samostatnému řešení, na kterých si můžete vyzkoušet, jak dobře jste výklad pochopili, a procvičit si řešení zadaných úloh.

1 Soustavy částic

1.1 Těžiště

V předchozím studijním textu [3] jsme se zabývali přímočarým posuvným pohybem těles. Nyní budeme přemýšlet nad složitějšími pohyby. Přitom zjistíme, že každé těleso má význačný bod, který se chová tak, jako by v něm byla soustředěna všechna hmota tělesa a působily v něm všechny všechny síly, které působí na těleso. Tento bod nazýváme *těžiště*. Pro dané těleso ho nalezneme následujícím postupem.

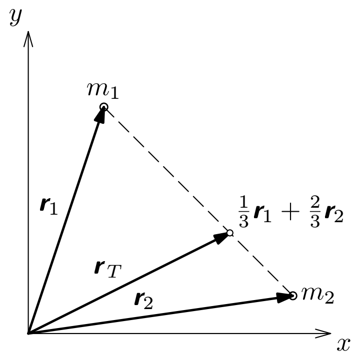
Nejprve si zvolíme vztažnou soustavu, ve které bude těleso v klidu (například pro míček ležící na stole soustavu spojenou se stolem), a v ní zavedeme kartézské souřadnicové osy. Potom můžeme každému bodu tělesa přiřadit *polohový vektor* $\boldsymbol{r}$

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}\,,$$

který spojuje počátek soustavy souřadnic a daný bod, $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ a $\boldsymbol{k}$ jsou jednotkové vektory kartézské soustavy souřadnic. Jestliže je těleso tvořeno N částicemi, pak pro polohu těžiště platí[1]

$$\boxed{\boldsymbol{r}_T = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{N} m_i \boldsymbol{r}_i\,,} \tag{1}$$

kde i představuje identifikační číslo částice, $\boldsymbol{r}_i$ je její polohový vektor, m_i je její hmotnost a m je celková hmotnost soustavy všech částic. Příklad nalezení těžiště soustavy dvou částic o hmotnostech $m_1 = 1\,\mathrm{kg}$ a $m_2 = 2\,\mathrm{kg}$ je na obrázku 1.



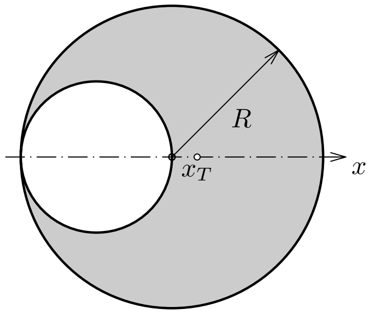
Obr. 1

Mnoho těles, se kterými se budeme setkávat, má určitou symetrii (například osovou nebo rovinnou). Poloha těžiště takového symetrického homogenního tělesa s jeho symetrií úzce souvisí. Těžiště homogenního tělesa se středovou symetrií leží v jeho středu symetrie (koule má těžiště ve svém středu), osově symetrické těleso má těžiště na své ose (těžiště válce je na jeho ose). Podobně těžiště tělesa s rovinnou symetrií leží v rovině symetrie.

Příklad 1 – kruhová deska s otvorem

Nalezněte těžiště homogenní kruhové desky o poloměru R všude téže tloušťky s kruhovým otvorem podle obrázku 2.

[1] Toto je ve skutečnosti definice hmotného středu soustavy, těžiště je definováno jako působiště tíhové síly. Oba body jsou však totožné, proto si dovolíme hmotný střed označovat jako těžiště.



Obr. 2

Řešení

Předně si všimneme, že těleso je osově symetrické (pokud uvažujeme pouze průmět bodů tělesa do roviny podle obr. 2), těžiště tedy leží na této ose, kterou označíme x (počátek zvolíme ve středu kruhové desky). Stačí tedy nalézt x-ovou souřadnici polohy těžiště.

Kdyby v sobě kruhová deska neměla otvor, pak by její hmotnost byla m_1. Vypočítáme plošný obsah celého kruhu P a otvoru P'. Zřejmě

$$P = \pi R^2 \,.$$

Poloměr vyříznutého otvoru je $R/2$, platí proto

$$P' = \pi \left(\frac{R}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\pi R^2 = \frac{1}{4} P \,.$$

Hmotnost m kruhové desky s otvorem proto je

$$m = m_1 - \frac{1}{4} m_1 = \frac{3}{4} m_1 \,.$$

Využijeme toho, že těžiště kruhu leží v jeho středu, a rozdělíme kruh s otvorem na dvě „částice“ – kruh o poloměru R a hmotnosti m_1 a kruh o poloměru $R/2$ a (záporné!) hmotnosti $m_2 = -m_1/4$. První kruh má těžiště na souřadnici $x_1 = 0$ a těžiště druhého kruhu se zápornou hmotností má souřadnici $x_2 = -R/2$. Soustava těchto dvou kruhů dohromady tvoří těleso, jehož těžiště hledáme. Podle vztahu (1) pro souřadnici těžiště x_T dostáváme

$$x_\mathrm{T} = \frac{1}{m}(m_1 x_1 + m_2 x_2) = \frac{4}{3m_1}\left[m_1 \cdot 0 + \left(-\frac{1}{4} m_1\right) \cdot \left(-\frac{1}{2} R\right)\right] = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{8} R = \frac{1}{6} R \,.$$

1.2 První impulzová věta

V tomto oddíle ukážeme, jak významným bodem je těžiště pro soustavu částic. Na těžiště totiž můžeme nahlížet jako na samostatnou částici, jejíž pohyb splňuje rovnici

$$\boxed{m\boldsymbol{a}_\mathrm{T} = \sum \boldsymbol{F}_\text{vnější}\,,} \tag{2}$$

kterou nazýváme **první impulzová věta**. Vysvětlíme význam všech veličin vystupujících v rovnici.

- m je celková hmotnost soustavy částic,
- $\boldsymbol{a}_\mathrm{T}$ je vektor zrychlení těžiště,
- $\sum \boldsymbol{F}_\text{vnější}$ je vektorový součet všech *vnějších sil* (tj. síly, kterými působí okolní objekty na částice naší soustavy). *Vnitřní síly* (tj. síly, kterými na sebe navzájem působí částice soustavy) do této výslednice nezapočítáváme, protože se dle zákona akce a reakce navzájem vyruší.

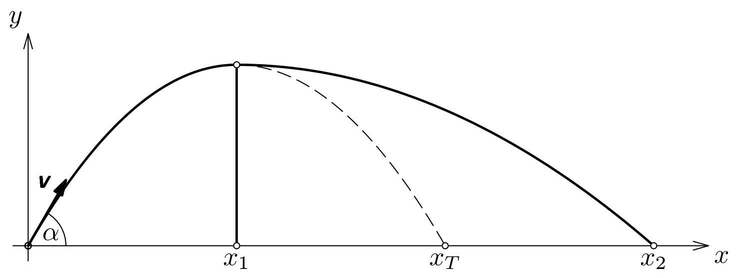
Rovnice (2) má stejný tvar jako druhý Newtonův pohybový zákon pro hmotný bod ($m\boldsymbol{a} = \sum \boldsymbol{F}$), těžiště se tedy pohybuje jako by do něj byla soustředěna veškerá hmota soustavy a působily na něj všechny vnější síly.

Pomocí první impulzové věty určíme zrychlení těžiště soustavy, pokud známe jeho celkovou hmotnost a výslednici vnějších sil. Uvědomte si, že nám nedává žádnou informaci o zrychlení jednotlivých částic soustavy.

O tom, jak určit síly, které na částice působí, pojednával minulý díl tohoto studijního textu Úlohy z mechaniky I [3].

Příklad 2 – exploze střely

Náboj byl vystřelen rychlostí $\boldsymbol{v}$ pod elevačním úhlem α, v nejvyšším bodě své trajektorie se explozí rozpadl na dvě části o stejné hmotnosti. Jedna část získala po výbuchu nulovou rychlost vzhledem k zemi a začala padat dolů. Určete, do jaké vzdálenosti od děla dopadne první a druhá část střely. Pro jednoduchost uvažujte, že výstřel proběhl ve vakuu.



Obr. 3

Řešení

Myšlená soustava částic bude představovat celý náboj. Na tuto soustavu působí pouze jedna vnější sila – tíhová síla $\boldsymbol{F}_G$. Rozpad náboje na dvě části způsobily vnitřní síly. První impulzová věta (2) má tvar

$$m\boldsymbol{a}_\mathrm{T} = \boldsymbol{F}_G\,,$$

kde m je hmotnost náboje. Řešení této rovnice však dobře známe – těžiště náboje se bude pohybovat po parabole (šikmý vrh vzhůru), pro souřadnice těžiště platí

$$x_\mathrm{T} = vt\cos\alpha\,, \quad y_\mathrm{T} = vt\sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2\,.$$

Z druhé rovnice zjistíme čas t_1, kdy těžiště „dopadne“ na zem ($y_\mathrm{T} = 0$),

$$t_1 = \frac{2v\sin\alpha}{g}\,.$$

V tomto čase dopadnou na zem i obě části střely, protože obě padají se stejným zrychlením jako těžiště a v nejvyšším bodě trajektorie mají shodnou nulovou svislou souřadnici rychlosti.

Dosazením času t_1 do vztahu pro x_T určíme místo, kam těžiště „dopadne“,

$$x_\mathrm{T} = L = \frac{2v^2\sin\alpha\cos\alpha}{g}\,.$$

První část náboje se oddělila v nejvyšším bodě paraboly a pak padala svisle dolů, dopadla tedy do vzdálenosti $x_1 = L/2$ od děla. Známe tedy polohu dopadu těžiště a jedné částice, polohu dopadu druhé určíme ze vztahu výpočet polohy těžiště (1)

$$x_\mathrm{T} = L = \frac{1}{M}(m_1x_1 + m_2x_2) = \frac{1}{m}\left(\frac{1}{2}m\cdot\frac{1}{2}L + \frac{1}{2}mx_2\right) = \frac{1}{4}L + \frac{1}{2}x_2\,,$$

odtud dostáváme

$$x_2 = \frac{3}{2}L\,.$$

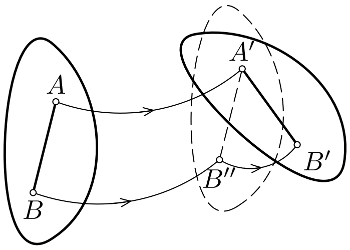
V dalším textu se budeme zabývat především *tuhými tělesy.* To jsou takové soustavy částic, kde vzdálenosti mezi jednotlivými částicemi jsou konstantní. Tuhé těleso je například baseballová pálka, špulka od nití nebo kulička v ložisku. Pro tuhá tělesa samozřejmě také platí rovnice (2).

2 Otáčení tuhého tělesa

Popisovat obecně pohyb tuhého tělesa by bylo nad rámec tohoto textu. Zaměříme se pouze na rovinný pohyb tělesa, kdy všechny body opisují rovinné trajektorie, které leží ve vzájemně rovnoběžných rovinách. Takové těleso má tři stupně volnosti (dva translační a jeden rotační).

Rovinný pohyb lze rozložit na posuvný, kdy všechny body tělesa opisují stejné trajektorie, a na otáčivý, kde body tělesa opisují kružnice se středem na ose otáčení (viz například obr. 4). Při posuvném pohybu stačí popisovat polohu jen jednoho referenčního bodu tělesa, jelikož relativní poloha ostatních bodů zůstává stejná. Jako referenční bod je vhodné volit těžiště tělesa, neboť pohybová rovnice těžiště je první impulzová věta.

V této kapitole se podrobněji zaměříme na druhou složku pohybu – otáčivý pohyb tuhého tělesa.



Obr. 4

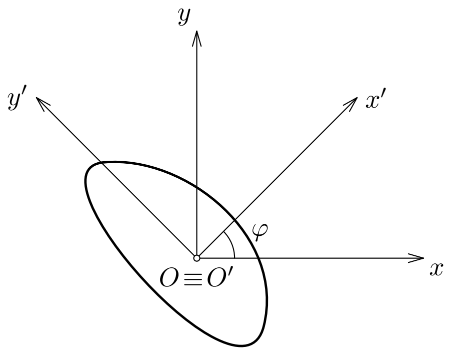
Je účelné zavést následující vztažné souřadnicové soustavy:

- *korotující* – spojená s rotujícím tělesem,
- *těžišťová* – spojená s těžištěm rotujícího tělesa, neotáčí se však spolu s tělesem (přesněji vůči inerciálním soustavám vykonává pouze posuvný pohyb),
- *inerciální* – spojená se zemí, vzhledem k ní vztahujeme pohyb tělesa – souřadnice vektorů rychlosti a zrychlení.

Například korotující soustava kola rovnoměrně přímočaře jedoucího auta se otáčí spolu s kolem, těžišťová soustava se pohybuje spolu s autem rovnoměrně přímočaře vůči zemi (její osy mají stále stejný směr). Uvědomte si, že těžišťová soustava může být i neinerciální.

2.1 Veličiny popisující otáčení

Pro popis otáčení tělesa potřebujeme zavést několik nových veličin (stejně jako pro posuvný pohyb jsme zaváděli polohu, rychlost a zrychlení). Na začátek zdůrazňujeme, že se budeme zabývat výhradně otáčením tuhého tělesa kolem osy, která je *nehybná v těžišťové soustavě*. Zajímá nás tedy například otáčení kladky kolem pevné osy nebo valení kola po silnici.



Obr. 5

V korotující a těžišťové soustavě zavedeme kartézské souřadnice $O'x'y'z'$ a $Oxyz$ tak, že mají společný počátek $O \equiv O'$ a osa z i z' míří ve směru osy otáčení (viz obr. 5 – osa z i z' míří kolmo před nákresnu). Otočení tělesa popisujeme veličinou *úhlová dráha* φ, rozumíme jí úhel mezi osami x a x'. Úhel φ měříme v radiánech, jedna otáčka (360°) odpovídá úhlu 2π radiánů. Pokud máme úhel zadaný ve stupních, platí tedy tento jednoduchý převodní vztah

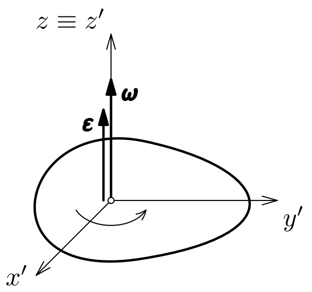
$$\{\varphi\}\mathrm{rad} = \frac{\pi}{180^\circ}\{\varphi\}^\circ\,.$$

Využijeme také vektorové veličiny *úhlová rychlost* $\boldsymbol{\omega}$, která popisuje rychlost otáčení, a *úhlové zrychlení* $\boldsymbol{\varepsilon}$, které popisuje změny rychlosti otáčení. Obě vektorové veličiny zavádíme v korotující soustavě, kde mají konstantní směr. Směr vektoru úhlové rychlosti $\boldsymbol{\omega}$ určíme pomocí *pravidla pravé ruky.* Pokud pravou dlaň přiložíme k ose otáčení, aby prsty pravé ruky mířily ve směru rotace, potom palec pravé ruky natažený ve směru osy otáčení určuje směr vektoru $\boldsymbol{\omega}$. Směr $\boldsymbol{\omega}$ udává směr osy otáčení, nikoli směr pohybu.

Jestliže se velikost vektoru úhlové rychlosti mění, je nenulový vektor úhlového zrychlení, který má v případě zrychleného otáčivého pohybu stejný směr jako úhlová rychlost a v případě zpomaleného otáčivého pohybu směr opačný. Při *rovnoměrně zrychleném otáčivém pohybu* má úhlové zrychlení $\boldsymbol{\varepsilon}$ konstantní velikost. Potom pro vektor úhlové rychlosti $\boldsymbol{\omega}$ platí

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_0 + \boldsymbol{\varepsilon} t\,,$$

kde $\boldsymbol{\omega}_0$ je počáteční úhlová rychlost (úhlová rychlost v čase $t = 0\,\mathrm{s}$).



Obr. 6

V každém případě, jak jsme řekli, mají vektory úhlové rychlosti i úhlového zrychlení při rovinných pohybech konstantní směr, proto není třeba pracovat s vektorovými veličinami, ale pouze s jejich souřadnicemi z'. Vektor $\boldsymbol{\omega}$ i $\boldsymbol{\varepsilon}$ míří jen ve směru osy z' (osy otáčení, viz obr. 6), jejich souřadnice z' označíme ω a ε (ostatní souřadnice jsou nulové). Soustavu souřadnic budeme volit tak, aby ω bylo kladné pro otáčení proti směru hodinových ručiček a záporné pro otáčení ve směru hodinových ručiček (tj. směr kladné poloosy z' volíme před nákresnu). Pak pro ω a úhlovou dráhu φ rovnoměrně zrychleného otáčivého pohybu platí

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t\,,$$

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\varepsilon t^2\,,$$

kde ω_0 je souřadnice počáteční úhlové rychlosti a φ_0 je úhlová dráha uražená v čase $t = 0$.

Na závěr uvedeme známé vztahy mezi velikostmi úhlových a polohových veličin pro jednotlivé body rotujícího tělesa, které konají pohyb po kružnici se středem na ose otáčení. Ve všech vztazích bude r značit vzdálenost bodu od osy otáčení. Dráha, kterou urazí bod na obvodu tělesa, je

$$s = \varphi r\,,$$

rychlost bodu na obvodu má velikost

$$v = \omega r$$

a obvodové zrychlení (tečné) je

$$a_\mathrm{t} = \varepsilon r\,.$$

Kromě toho mají rotující body ještě dostředivé (normálové zrychlení) o velikosti

$$a_\mathrm{n} = \omega^2 r\,.$$

2.2 Moment setrvačnosti

Moment setrvačnosti J je veličina, která popisuje setrvačnost rotujícího tělesa. Jeho hodnota závisí na rozložení hmoty tělesa vzhledem k ose otáčení – velký moment setrvačnosti mají tělesa, které mají hmotu daleko od osy otáčení. Jak jsem již řekli dříve, zajímá nás pouze rotace kolem osy, která je pevná vzhledem k tělesu. V těchto případech je zřejmě moment setrvačnosti tělesa konstantní.

Moment setrvačnosti soustavy částic o hmotnostech m_i vzhledem k dané ose je definován vztahem

$$\boxed{J = \sum m_i r_i^2\,,}$$

kde r_i je vzdálenost i-té částice od osy otáčení. V případě spojitého tělesa je třeba pro výpočet použít integrálního počtu. Momenty setrvačnosti některých homogenních těles vzhledem k osám procházející těžištěm najdete v učebnicích [1], [2] nebo ve studijním textu [7].

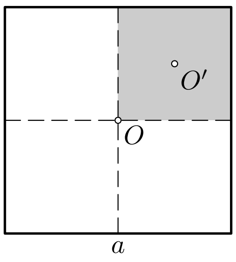
Známe-li moment setrvačnosti J_T tělesa vzhledem k nějaké ose procházející těžištěm, je snadné určit moment setrvačnosti J vzhledem k jiné ose stejného směru. Vztah mezi těmito momenty setrvačnosti nazýváme *Steinerova věta*

$$J = J_\mathrm{T} + md^2\,, \tag{3}$$

kde m je hmotnost tělesa a d vzdálenost uvažovaných rovnoběžných os.

Příklad 3 – moment setrvačnosti čtverce

Vypočítejte pomocí Steinerovy věty moment setrvačnosti čtvercového obrazce vzhledem k ose procházející středem čtverce, která je kolmá na rovinu čtverce. Hmotnost čtverce je m, délka jeho strany je a.



Obr. 7

Řešení

Hledaný moment setrvačnosti čtverce vzhledem k ose procházející bodem O označme $J_O(a)$, ten může záviset jen na hmotnosti a rozměrech obrazce. Fyzikální rozměr momentu setrvačnosti je kg·m^2, proto nutně musí platit

$$J_O = Kma^2\,,$$

kde K je bezrozměrné číslo.

Celou čtvercovou desku o straně a a hmotnosti m můžeme podle obrázku 7 rozdělit na čtyři menší čtvercové desky o straně $a/2$ a hmotnosti $m/4$. Moment setrvačnosti tohoto menšího čtverce vzhledem k ose procházející bodem O' je

$$J'_{O'} = K\left(\frac{1}{4}m\right)\left(\frac{1}{2}a\right)^2 = \frac{1}{16}Kma^2$$

a vzhledem k ose jdoucí bodem O podle Steinerovy věty je

$$J'_O = J'_{O'} + \left(\frac{1}{4}m\right)\left(\frac{1}{4}a\sqrt{2}\right)^2 = \frac{1}{16}Kma^2 + \frac{1}{32}ma^2\,.$$

Moment setrvačnosti celé desky můžeme vyjádřit pomocí momentů setrvačnosti menších čtverců takto

$$Kma^2 = J_O = 4J'_O = \frac{1}{4}Kma^2 + \frac{1}{8}ma^2\,,$$

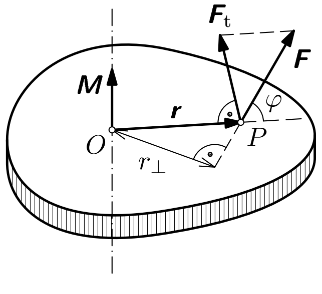
z toho $K = \frac{1}{6}$ a hledaný moment setrvačnosti je $J_O = \frac{1}{6}ma^2$.

2.3 Moment síly

Úhlové zrychlení tělesa je způsobeno silou, otáčivý účinek síly však také závisí na vzdálenosti vektorové přímky síly od osy otáčení. Je proto třeba zavést veličinu *moment síly*, která toto bere v úvahu. Jelikož osa otáčení je nehybná v těžišťové soustavě, stačí uvažovat vektory sil *kolmé na osu otáčení.* Přesná definice momentu síly vzhledem k ose otáčení pak zní

$$\boxed{\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}\,,}$$

kde $\boldsymbol{r}$ je polohový vektor působiště síly $\boldsymbol{F}$ vzhledem k ose otáčení (viz obr. 8).



Obr. 8

Jestliže znáte vlastnosti vektorového součinu, víte, že vektor $\boldsymbol{M}$ bude směřovat ve směru osy otáčení (stejně jako vektor úhlové rychlosti a zrychlení) a jeho velikost bude

$$M = Fr\sin\varphi = F_\mathrm{t}r = Fr_\perp\,,$$

kde F_t je velikost tečné složky síly $\boldsymbol{F}$ a $r_\perp$ je *rameno síly* (viz obr. 8).

Ve všech příkladech budeme pracovat se z-ovou souřadnicí momentu síly M, jejíž znaménko určíme podle pravidla pravé ruky (pokud způsobuje roztáčení proti směru hodinových ručiček, je kladné, v opačném případě je záporné).

2.4 Druhá impulzová věta

Na závěr teoretické části studijního textu se dostáváme k formulaci důležitého zákona. Pro tuhé těleso, které se otáčí kolem osy nehybné v těžišťové soustavě, platí rovnice

$$\boxed{J\varepsilon = \sum M\,,} \tag{4}$$

kterou nazýváme **druhá impulzová věta**. Vysvětlíme význam všech veličin vystupujících ve vztahu.

- J je moment setrvačnosti tělesa vzhledem k ose otáčení,
- ε je souřadnice úhlového zrychlení,
- $\sum M$ je souřadnice vektorového součtu všech momentů sil vzhledem k ose otáčení, které působí na těleso.

Všimněte si, že rovnice (4) má analogický tvar jako druhý Newtonův pohybový zákon, ale při použití úhlových veličin.

Pomocí druhé impulzové věty určíme úhlové zrychlení tuhého tělesa, pokud známe jeho moment setrvačnosti a výslednici momentů vnějších sil.

2.5 Kinetická energie otáčení tuhého tělesa

Pro kinetickou energii tělesa konajícího otáčivý pohyb, které má moment setrvačnosti J vzhledem k ose otáčení, lze odvodit vztah

$$E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}J\omega^2\,, \tag{5}$$

kde ω je souřadnice okamžitého úhlové rychlosti. Tento vztah platí pro libovolné tuhé těleso a je analogií vztahu pro kinetickou energii posuvného pohybu $\frac{1}{2}mv^2$.

Příklad 4 – roztáčení setrvačníku

Těžký setrvačník o momentu setrvačnosti J roztáčíme účinkem sil o konstantním momentu M tak, že během doby t zvětší svou úhlovou rychlost z počáteční nulové hodnoty na hodnotu ω.

a) Porovnáním práce vykonané vnější silou při roztáčení setrvačníku a kinetické energie, kterou získal, ověřte platnost druhé impulzové věty.

b) Určete moment síly, jestliže $J = 12{,}0\,\mathrm{kg{\cdot}m^2}$, $t = 220\,\mathrm{ms}$ a $\omega = 6{,}20\,\mathrm{rad/s}$.

Řešení

Setrvačník se roztáčí rovnoměrně zrychleně a platí proto $\omega = \varepsilon t$ a $\varphi = \frac{1}{2}\varepsilon t^2$.

a) Setrvačník při roztočení získal kinetickou energii

$$E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}J\omega^2 = 231\,\mathrm{J}\,.$$

Předpokládejme, že na setrvačníku o poloměru r je namotaný motouz, za který táhneme silou o velikosti F, pak je vykonaná práce rovna

$$W = Fs = Fr\varphi = \frac{1}{2}Fr\varepsilon t^2 = \frac{1}{2}M\omega t$$

Změna kinetické energie je dle zákona zachování energie rovna vykonané práci.

$$\frac{1}{2}J\omega^2 = \frac{1}{2}M\omega t \quad \Rightarrow \quad \frac{J\omega}{t} = J\varepsilon = M\,,$$

což je druhá impulzová věta.

b) Dopočítáme ještě velikost momentu síly

$$M = \frac{J\omega}{t} = 338\,\mathrm{N{\cdot}m}\,.$$

2.6 Srovnání posuvného a otáčivého pohybu

Na závěr druhé kapitoly shrneme zavedené veličiny a vztahy, které se týkají otáčivého pohybu tuhého tělesa okolo pevné osy, a najdeme odpovídající veličiny a zákony přímočarého posuvného pohybu, kterým jsme se zabývali v minulém díle studijního textu [3]. Pokusíme se najít formální analogie, které nám umožní snadnější zapamatování užívaných vztahů.

posuvný pohyb		otáčivý pohyb	
dráha	s	úhlová dráha	φ
rychlost	$\boldsymbol{v}$	úhlová rychlost	$\boldsymbol{\omega}$
zrychlení	$\boldsymbol{a}$	úhlové zrychlení	$\boldsymbol{\varepsilon}$
hmotnost	m	moment setrvačnosti	J
síla	$\boldsymbol{F}$	moment síly	$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$
první impulzová věta	$ma = \sum F$	druhá impulzová věta	$J\varepsilon = \sum M$
kinetická energie	$\frac{1}{2}mv^2$	kinetická energie	$\frac{1}{2}J\omega^2$

Podrobné odvození všech vztahů této i předcházející kapitoly a odvození zákonů s obecnější platností najdete ve studijním textu [7].

3 Mechanické soustavy, jejichž části konají otáčivý pohyb

V této kapitole budeme na konkrétních příkladech studovat mechanické soustavy těles, které budou konat nejenom posuvné, ale rovněž otáčivé pohyby v homogenním tíhovém poli Země. Využijeme proto znalosti vyložené v úvodní části textu.

Připomínáme, že tučný symbol $\boldsymbol{A}$ je značka pro vektorovou veličinu a symbol A budeme používat pro *souřadnici* veličiny tak, jak jsme ji zavedli v předchozím studijním textu [3] pro rychlost a zrychlení a v předchozí kapitole pro úhlovou rychlost a úhlové zrychlení. Jiný význam symbolů bude vždy zdůrazněn.

3.1 Nakloněná rovina

Nakloněná rovina je model, který se vyskytuje v četných úlohách z mechaniky. Její kouzlo je v jednoduchosti. Je to jeden z mála příkladů ze života, kdy můžeme reálnou fyzikální situaci popsat téměř úplně přesně jednoduchými fyzikálními vztahy. Téměř každý někdy jel z kopce na kole či ze svahu na sáňkách.

V další části nás bude zajímat chování různých těles na nakloněné rovině; zavedeme obecný postup, jak takové příklady řešit.

Na těleso na nakloněné rovině bude působit tíhová síla $\boldsymbol{F}_G$ a reakce nakloněné roviny $\boldsymbol{R}$, ostatní síly (odpor vzduchu) zanedbáme. Dále budeme předpokládat, že povrch všech těles jsou tvrdé a dokonale hladké, takže nevzniká valivý odpor. Působiště tíhové síly je v těžišti tělesa a její vektor směřuje svisle dolů, reakce $\boldsymbol{R}$ má působiště v místě dotyku tělesa s nakloněnou rovinou a může mít otáčivý účinek.

Pro každé těleso napíšeme dvě rovnice – první a druhou impulzovou větu (první rovnice bude vektorová (2), druhá souřadnicová (4)). Pokud je pohyb těles nějakým způsobem svázán, přidáme vazebné podmínky. Vždy by měl být výsledný počet rovnic stejný jako počet neznámých. Konkrétní návod jak při sestavování rovnic postupovat bude předveden při řešení příkladů.

Zbývá vyřešit soustavu rovnic. Často nás bude zajímat jen výsledné zrychlení soustavy. V tomto případě není nutné velikosti neznámých působících sil dopočítávat. Možná vám přijde tento postup hodně složitý. Uvidíte na konkrétních příkladech, že to tak hrozné vůbec není.

Teď přistoupíme k nejjednoduší úloze, a ta se bude týkat tělesa valícího se po nakloněné rovině.

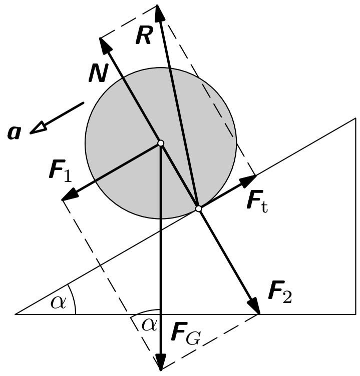
Příklad 5 – valení po nakloněné rovině

Válec o hmotnosti m a poloměru r leží na nakloněné rovině, která svírá s vodorovným směrem úhel α. Součinitel smykového tření mezi válcem a nakloněnou rovinou označme f, součinitel klidového tření f_0.

a) Může válec zůstat na nakloněné rovině v klidu?

b) Určete zrychlení válce a velikost třecí síly za předpokladu, že se odvaluje bez prokluzování. Napište podmínku pro součinitel tření, aby tento případ nastal.

c) Určete zrychlení a úhlové zrychlení válce, pokud není splněna podmínka z části b) a válec při odvalování prokluzuje.



Obr. 9

Řešení

Řešení příkladu začneme nakreslením obrázku (obr. 9), do kterého znázorníme všechny působící síly a předpokládaný směr zrychlení. Síly rozložíme do směru kolmého na nakloněnou rovinou a rovnoběžného s nakloněnou rovinou. Tíhová síla $\boldsymbol{F}_G$ má složky $\boldsymbol{F}_1$ (průmět do směru rovnoběžného s nakloněnou rovinou) a $\boldsymbol{F}_2$ (průmět do směru kolmého k nakloněné rovině) o velikostech

$$F_1 = F_G \sin\alpha\,, \quad F_2 = F_G \cos\alpha\,.$$

Složka reakce $\boldsymbol{R}$ kolmá na nakloněnou rovinu je normálová síla $\boldsymbol{N}$, složka rovnoběžná s nakloněnou rovinou je třecí síla $\boldsymbol{F}_\mathrm{t}$ – ta působí proti směru okamžité rychlosti.

Na úvod si ještě uvědomíme, že pro moment setrvačnosti válce vzhledem k ose symetrie válce platí $J = mr^2/2$.

a) Pokud je třecí síla $\boldsymbol{F}_\mathrm{t}$ nenulová, neprochází vektor reakce $\boldsymbol{R}$ těžištěm válce (viz obr. 9) a tato síla má tedy otáčivý účinek (má nenulový moment vzhledem k ose procházející těžištěm). Válec se začne účinkem tíhové síly odvalovat.

Je-li třecí síla nulová, začne válec bez tření klouzat dolů. Válec v žádném případě nezůstane na nakloněné rovině v klidu.

b) Dalším krokem řešení příkladu je sestavení pohybových rovnic. Těmi jsou rovnice první a druhé impulzové věty pro válec. První impulzová věta pro válec je

$$m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}_G + \boldsymbol{R}\,, \tag{6}$$

druhá impulzová věta pro osu otáčení procházející těžištěm válce (tato osa je nehybná v těžišťové soustavě) je

$$J\varepsilon = \sum M = F_\mathrm{t} r\,, \tag{7}$$

Vektorové přímky tíhové a normálové síly procházejí těžištěm, a proto mají nulový moment, nenulový moment má jen třecí síla.

Vektorovou rovnici (6) přepíšeme na dvě rovnice pro souřadnici zrychlení a rovnoběžnou s nakloněnou rovinou a souřadnici kolmou na nakloněnou rovinu (ta je ovšem nulová, jelikož se válec ve směru kolmém na nakloněnou rovinu nepohybuje).

$$ma = F_1 - F_\mathrm{t} = mg\sin\alpha - F_\mathrm{t}\,, \tag{8}$$

$$0 = N - F_2 \quad\Rightarrow\quad N = mg\cos\alpha\,. \tag{9}$$

Předpokládejme podle zadání příkladu, že se válec bude odvalovat bez prokluzování, tj. povrch válce bude v místě dotyku v klidu vůči povrchu nakloněné roviny. Pro velikost třecí síly platí $F_\mathrm{t} \leq f_0 N$ (viz předchozí studijní text [3]). Předpokládáme tedy, že součinitel f_0 je dostatečně velký, aby k prokluzování nedocházelo. Velikost samotné třecí síly F_t však neznáme.

Posledním vztahem, který doplníme, je vazebná rovnice, která vyjadřuje to, že válec neprokluzuje

$$a = \varepsilon r\,. \tag{10}$$

Máme celkově soustavu čtyř rovnic (7), (8), (9) a (10) pro čtyři neznámé a, ε, F_t a N. Její systematické řešení začneme dosazením (10) do vztahu (7) a vyjádřením velikosti F_t z rovnice (7)

$$F_\mathrm{t} = \frac{Ja}{r^2}\,.$$

Dosadíme za F_t do rovnice (8) a dostaneme vztah pro souřadnici zrychlení

$$ma = mg\cos\alpha - \frac{Ja}{r^2} \quad\Rightarrow\quad a = \frac{g\sin\alpha}{1 + J/mr^2} = \frac{2}{3}g\sin\alpha\,. \tag{11}$$

Velikost třecí síly potom je

$$F_\mathrm{t} = \frac{mgJ\sin\alpha}{mr^2 + J} = \frac{1}{3} mg \sin\alpha \,.$$

Kdy se válec odvaluje bez prokluzování? Součinitel klidového tření f_0 musí být tak velký, aby platilo $F_\mathrm{t} \leq f_0 N$. Dosadíme-li z (9) a posledního vztahu, dostaneme nerovnost

$$\frac{mgJ\sin\alpha}{mr^2 + J} \leq f_0 mg\cos\alpha \quad \Rightarrow \quad f_0 \geq \frac{J\,\mathrm{tg}\,\alpha}{mr^2 + J} = \frac{1}{3}\,\mathrm{tg}\,\alpha \,.$$

c) Při nesplnění poslední podmínky bude válec při odvalování smýkat (povrch válce a povrch nakloněné roviny budou ve vzájemném pohybu). Pro velikost třecí síly bude platit

$$F_\mathrm{t} = fN \,. \tag{12}$$

Nyní máme soustavu rovnic (7), (8), (9) a (12) pro neznámé a, ε, F_t a N. Řešením soustavy dostaneme $F_\mathrm{t} = fmg\cos\alpha$ a

$$a = g(\sin\alpha - f\cos\alpha)\,, \quad \varepsilon = \frac{fmgr}{J}\cos\alpha = \frac{2fg}{r}\cos\alpha \,.$$

Sami si ověřte, že v takovém případě platí

$$a > \frac{g\sin\alpha}{1 + J/mr^2}\,, \quad \varepsilon < \frac{a}{r}$$

Zrychlení válce odvalujícího se bez skluzu můžeme také určit pomocí zákona zachování energie. Změna potenciální energie se projeví jako změna kinetické energie posuvného a otáčivého pohybu. Nechť válec urazí dráhu d, pak jeho potenciální energie klesne o $mgd\sin\alpha$ a kinetická energie vzroste o

$$\Delta E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}m(\omega r)^2 + \frac{1}{2}J\omega^2 \,.$$

Z rovnosti změn obou energií dostaneme

$$\frac{(\omega r)^2}{2d} = \frac{g\sin\alpha}{1 + J/mr^2} \,.$$

Válec zrychluje rovnoměrně a platí proto následující rovnosti

$$d = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}a\left(\frac{v}{a}\right)^2 = \frac{v^2}{2a} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{v^2}{2d} = \frac{(\omega r)^2}{2d} = \frac{g\sin\alpha}{1 + J/mr^2} \,.$$

Dostali jsme tedy stejný výsledek jako (11).

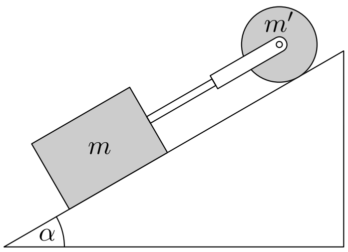
Teď již máme potřebné znalosti k tomu, abychom se pustili do řešení pohybu složitějších soustav na nakloněné rovině.

Příklad 6 – válec a kvádr na nakloněné rovině

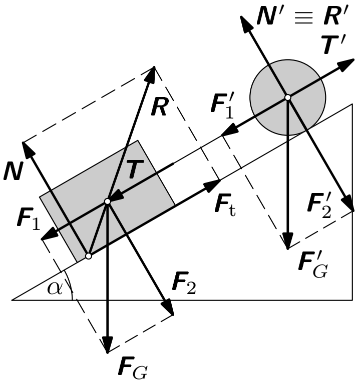
Kvádr o hmotnosti m a válec o hmotnosti m' a poloměru r leží na nakloněné rovině. Obě tělesa jsou spojena tuhou tyčkou a třmenem (viz obr. 10). Součinitel klidového a smykového tření mezi kvádrem a nakloněnou rovinou je f_0 a f, mezi válcem a nakloněnou rovinou je f'_0 a f'.

a) Rozhodněte, pro jakou hodnotu součinitele tření zůstane soustava v klidu, je-li sklon roviny α.

b) Jaké bude zrychlení soustavy a jakou silou bude namáhána tyčka, pokud se dá soustava do pohybu?



Obr. 10



Obr. 11

Řešení

a) Nakreslíme si obrázek (obr. 11) a do něj zakreslíme všechny síly působící na soustavu – tíhové síly $\boldsymbol{F}_\mathrm{G}$ a $\boldsymbol{F}'_G$, reakce $\boldsymbol{R}$ a $\boldsymbol{R}'$ a tlakové síly tyčky $\boldsymbol{T}$ a $\boldsymbol{T}'$. Všechny síly rozložíme na složky rovnoběžné s nakloněnou rovinou a kolmé na nakloněnou rovinu.

Na válec nepůsobí v klidu žádná třecí síla, jinak by měla nenulový moment vzhledem k ose válce, válec by se otáčel a nebyl by v klidu.

Nyní vyřešíme, za jakých podmínek zůstane soustava válce a kvádru v klidu. Vektorový součet sil působících na každé těleso musí být nulový

$$\boldsymbol{F}_G + \boldsymbol{R} + \boldsymbol{T} = \boldsymbol{0}\,, \quad \boldsymbol{F}'_G + \boldsymbol{R}' + \boldsymbol{T}' = \boldsymbol{0}\,.$$

Tyto rovnice přepíšeme vždy na dvojici rovnic pro velikosti sil, která vyjadřuje rovnováhu sil v rovnoběžném směru s nakloněnou rovinou a ve směru kolmém na nakloněnou rovinu. Pro kvádr platí

$$F_1 + T = F_t \quad \Rightarrow \quad mg \sin \alpha + T = F_t \,, \tag{13}$$
$$F_2 = N \quad \Rightarrow \quad mg \cos \alpha = N \,, \tag{14}$$

pro válec platí

$$F_1' = T' \quad \Rightarrow \quad m' g \sin \alpha = T' \,, \tag{15}$$
$$F_2' = N' \quad \Rightarrow \quad m' g \cos \alpha = N' \,. \tag{16}$$

Tyčka, která spojuje válec a kvádr, je tuhá, tlakové síly $\boldsymbol{T}$ a $\boldsymbol{T}'$ musí mít proto stejnou velikost $T = T'$ a opačný směr. Z rovnic (13) a (15) dostáváme

$$(m + m')g \sin \alpha = F_t \,.$$

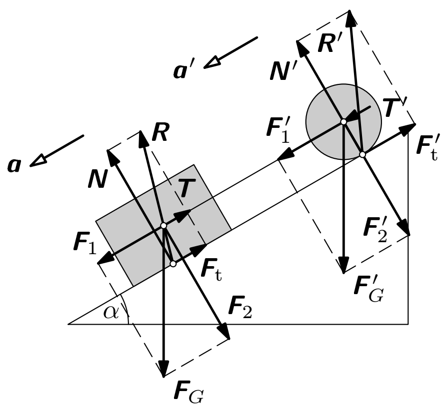
Pro třecí sílu platí $F_t \leq f_0 N$, za velikost N dosadíme z (14). Spolu s poslední rovnicí potom máme

$$(m + m')g \sin \alpha \leq f_0 mg \cos \alpha \,,$$

soustava zůstane v klidu pro hodnotu součinitele klidového tření

$$f_0 \geq \frac{m + m'}{m} \operatorname{tg} \alpha \,.$$

b) Znovu nakreslíme obrázek (obr. 12) a do něj kromě všech sil vyznačíme



Obr. 12

i předpokládaný směr zrychlení. Poté můžeme začít sestavovat pohybové rovnice.

První impulzová věta pro kvádr a válec říká

$$m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}_G + \boldsymbol{R} + \boldsymbol{T}\,, \quad m\boldsymbol{a}' = \boldsymbol{F}_G' + \boldsymbol{R}' + \boldsymbol{T}'\,.$$

Obdobně jako v předchozím příkladě rozepíšeme tyto vektorové rovnice na rovnice pro směr rovnoběžný s nakloněnou rovinou a směr kolmý na nakloněnou rovinu. Pro kvádr dostaneme

$$N = mg\cos\alpha\,, \quad ma = mg\sin\alpha + T - F_\mathrm{t} \tag{17}$$

a pro válec dostaneme

$$N' = m'g\cos\alpha\,, \quad m'a' = m'g\sin\alpha - T' - F_\mathrm{t}' \tag{18}$$

Druhá impulzová věta pro válec říká

$$J\varepsilon = F_\mathrm{t}' r\,, \tag{19}$$

kde J je moment setrvačnosti válce vzhledem k jeho ose.

Ještě přidáme vazebné rovnice vyjadřující tuhost tyčky. Tlakové síly mají na obou koncích stejnou velikost $T = T'$ a zrychlení obou těles je stejné $a = a'$.

Zbývá doplnit dvě rovnice pro velikosti třecích sil. Pro třecí sílu mezi kvádrem a nakloněnou rovinou platí

$$F_\mathrm{t} = fN = fmg\cos\alpha\,. \tag{20}$$

Dále budeme muset stejně jako v předchozím příkladě rozlišit dva případy.

(i) *Součinitel klidového tření f_0' je dostatečně velký, aby docházelo k odvalování válce bez skluzu.* Potom mezi zrychlením a úhlovým zrychlením platí vztah $a = \varepsilon r$.

Přistupme k řešení soustavy rovnic; nejdříve sečteme rovnice (17) a (18) a dosadíme do nich za F_t z (20) a F_t' z (19), po úpravě dostaneme

$$a = \frac{(m + m')g\sin\alpha - fmg\cos\alpha}{m + m' + J/r^2}\,.$$

Zpětným dosazením do pohybové rovnice (17) vyjádříme velikost tlakové síly, kterou je namáhána tyčka

$$T = mg\,\frac{fm'\cos\alpha - J/r^2\cdot(\sin\alpha - f\cos\alpha)}{m + m' + J/r^2}\,.$$

Hned odvodíme podmínku, při jejímž splnění se bude válec odvalovat bez skluzu. Pro třecí sílu mezi válcem a nakloněnou rovinou platí $F'_\mathrm{t} \leq f'_0 N'$, po dosazení z (18) a (19) máme nerovnost $Ja/r^2 \leq f'_0 m' g \cos\alpha$, do které dosadíme za souřadnici zrychlení a a po chvilce upravování dostaneme podmínku

$$\mathrm{tg}\,\alpha \leq \frac{mf + m'f'_0 + (m+m')m'f'_0 r^2/J}{m+m'}\,.$$

(ii) Při nesplnění této podmínky *dochází k odvalování válce s prokluzováním.* Pak pro třecí sílu mezi válcem a nakloněnou rovinou platí

$$F'_\mathrm{t} = f'N' = f'm'g\cos\alpha\,.$$

Podobným způsobem jako v (i) vyjádříme souřadnici zrychlení

$$a = \frac{mg(\sin\alpha - fg\cos\alpha) + m'g(\sin\alpha - f'\cos\alpha)}{m+m'}\,.$$

Vypočítejme ještě velikost tlakové síly T,

$$T = \frac{mm'}{m+m'}(f-f')g\cos\alpha\,.$$

3.2 Hmotné kladky

V této kapitole se budeme zabývat soustavami hmotných kladek a hmotných těles spojenými navzájem vlákny. Soustavy kladek jsme již studovali ve studijním textu Úlohy z mechaniky I [3], kde jsme hmotnosti kladek zanedbávali, zde naše znalosti doplníme, abychom uměli vyřešit pohyb soustavy s hmotnými kladkami. Ve všech příkladech budeme předpokládat, že tření mezi kladkou a vláknem, které je přes ní vedeno, je dostatečně veliké, aby nedocházelo k prokluzování. Tření v ložisku kladky je velice malé a proto ho zanedbáme. Zanedbáme i hmotnost vlákna.

Připomeňme, že rozlišujeme dva typy kladek – *pevné* a *volné* – podle toho, jestli mají pevnou osu, nebo se mohou pohybovat ve svislém směru. Naším úkolem bude nalézt zrychlení všech těles a tahové síly vláken. Před řešením prvního příkladu si stručně zopakujeme postup sestavování pohybových rovnic, ve kterém zdůrazníme odlišnosti nehmotných a hmotných kladek.

1. Nakreslíme obrázek soustavy. Do obrázku zakreslíme všechny tíhové síly $\boldsymbol{F}_G$ a tahové síly $\boldsymbol{T}$ působící na tělesa a kladky. Tahová síla vlákna působí vždy směrem od tělesa (či kladky) a její velikost je pro obě spojená tělesa stejná.

Do obrázku dále zakreslíme zrychlení každého tělesa a středu volné kladky (ať je hmotná nebo nehmotná).

2. Úlohu řešíme tak, že pro každé těleso a volnou *hmotnou kladku* napíšeme pohybovou rovnici pro svislou souřadnici a zrychlení tělesa o hmotnosti m
$$ma = \sum F\,, \tag{21}$$
kde $\sum F$ je souřadnice výslednice sil působících na těleso.

3. Pro každou *hmotnou kladku* dále doplníme rovnici, která vyjadřuje druhou impulzovou větu. Tato rovnice bude mít vždy tvar
$$J\varepsilon = r \cdot \sum T\,, \tag{22}$$
kde J je moment setrvačnosti kladky vzhledem k ose otáčení, r je poloměr kladky a $\sum T$ je souřadnice výslednice tahových sil působících na obvod kladky prostřednictvím třecích sil. Určíme ji jako součet velikostí tahových sil, přičemž síly, které mají otáčivý účinek v kladném směru (proti směru hodinových ručiček), vystupují v součtu s kladným znaménkem, naopak síly, které mají otáčivý účinek v záporném směru, píšeme se záporným znaménkem. Tíhová síla působící na kladku má nulový moment vzhledem k ose otáčení kladky.

4. Další rovnice, kterou píšeme pro každou *hmotnou kladku*, je dána vazbou, že vlákno vedené přes kladku neprokluzuje. Pokud na jedné straně kladky má vlákno zrychlení $\boldsymbol{a}_1$ a na druhé straně zrychlení $\boldsymbol{a}_2$, potom platí
$$\varepsilon r = \frac{1}{2}(a_1 + a_2)\,, \tag{23}$$
kde a_i je souřadnice zrychlení $\boldsymbol{a}_i$ taková, že kladných hodnot nabývá pro $\boldsymbol{a}_i$ urychlující v kladném směru a záporných pro $\boldsymbol{a}_i$ urychlující v záporném směru.

5. Nakonec ještě napíšeme rovnici pro každé vlákno, která vyjadřuje, že vlákno je nepružné. Při sestavování rovnice vlákna vycházíme z následujících tří pravidel
a) Zrychlení obou konců části vlákna, které není vedeno přes žádnou kladku, mají stejnou velikost i směr.
b) Zrychlení částí vlákna na obou stranách pevné kladky mají stejnou velikost a opačný směr.
c) Jestliže na jedné straně volné kladky má vlákno zrychlení $\boldsymbol{a}_1$ a na druhé straně zrychlení $\boldsymbol{a}_2$, pohybuje se střed kladky se zrychlením
$$\boldsymbol{a}_\mathrm{k} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2)\,. \tag{24}$$

V případě, kdy je vlákno vedeno přes n volných kladek, můžeme kombinací těchto vztahů dostat obecnější pravidlo, které najdete v textu [3].

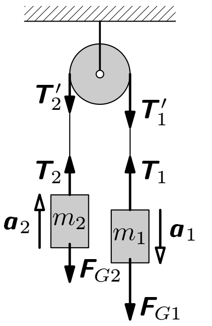
Nyní již máme dostatek rovnic, abychom mohli pohyb soustavy vyřešit. Neznámé jsou souřadnice zrychlení těles a kladek, souřadnice úhlových zrychlení hmotných kladek a velikosti tahových sil vláken. Hmotnosti těles a kladek a momenty setrvačnosti kladek známe. Pokud souřadnice zrychlení vyjde záporná, znamená to, že skutečný směr zrychlení je opačný, než jsme vyznačili na obrázku.

Začneme velmi jednoduchým příkladem, na kterém si ukážeme, jak právě formulovaná pravidla použít.

Příklad 7 – pevná kladka

Dvě tělesa o hmotnostech m_1 a m_2 jsou zavěšena na pevné kladce, která má moment setrvačnosti J a poloměr r (obr. 13). Vypočítejte zrychlení těles a velikost síly, kterou je napínáno vlákno.

Řešení



Obr. 13

Do obrázku zakreslíme tíhové a tahové síly (obr. 13) a předpokládané směry zrychlení těles. Důležité je uvědomit si, že hmotná kladka způsobuje, že velikost tahové síly není po celé délce vlákna stejná, ale právě na kladce mění svoji velikost (z T_1 na T_2). Tento rozdíl vytváří moment sil, který kladku roztáčí.

V soustavě jsou dvě tělesa a žádná volná kladka, napíšeme proto pohybové rovnice (21) pro obě tělesa, podle směru vektorů sil, dáváme před velikosti sil znaménka.

$$m_1a_1 = m_1g - T_1\,,$$
$$m_2a_2 = -m_2g + T_2\,.$$

Pro hmotnou pevnou kladku platí druhá impulzová věta (22)

$$J\varepsilon = (T_2 - T_1)r\,.$$

Další rovnice popisuje vazbu mezi vláknem a pevnou kladku, podle (23) máme

$$\varepsilon r = \frac{1}{2}(-a_1 - a_2)\,.$$

Dostáváme se k bodu 5, tedy k rovnici vlákna. Zrychlení vlákna na obou stranách pevné kladky má stejnou velikost, ale opačný směr, tj. $\boldsymbol{a}_1 = -\boldsymbol{a}_2$. Pro souřadnice platí

$$a_1 = a_2\,.$$

Tak máme všech pět rovnic pro neznámé a_1, a_2, ε, T_1 a T_2. První dvě rovnice sečteme a dosadíme do nich ze třetí a páté rovnice

$$(m_1 + m_2)a_1 = (m_1 - m_2)g + J\varepsilon/r\,.$$

Za úhlové zrychlení dosadíme ze čtvrté – poslední nevyužité – rovnice

$$(m_1 + m_2)a_1 = (m_1 - m_2)g - Ja_1/r^2$$

a pro souřadnice zrychlení dostáváme

$$a_1 = a_2 = -\varepsilon r = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + J/r^2}\, g\,.$$

Velikosti tahových sil můžeme vyjádřit z prvních dvou pohybových rovnic

$$T_1 = m_1 g\,\frac{2m_2 + J/r^2}{m_1 + m_2 + J/r^2}\,, \quad T_2 = m_2 g\,\frac{2m_1 + J/r^2}{m_1 + m_2 + J/r^2}\,.$$

Zjistili jsme tedy, že pokud má pevná kladka nenulový moment setrvačnosti, je zrychlení těles menší, než v případě nehmotné kladky, neboť ve jmenovateli je navíc člen J/r^2. Část změny potenciální energie závaží se totiž projeví jako změna kinetické energie rotace kladky. Dalším novým jevem jsou různé velikosti tahové síly ($T_1 \neq T_2$) na různých částech vlákna vedeného přes kladku.

Příklad 8 – volná kladka

Mějme soustavu pevné a volné kladky podle obrázku 14. Jeden konec vlákna je pevně uchycen u stropu a na druhém je zavěšeno těleso o hmotnosti m_1. Pevná kladka má moment setrvačnosti J_1 a poloměr r_1, volná kladka má moment setrvačnosti J_2, poloměr r_2 a hmotnost m_2. Určete zrychlení tělesa a velikost síly, kterou je napínána část vlákna, na které visí těleso.

Řešení

Začneme nakreslením obrázku (obr. 14), ve kterém vyznačím tíhové síly a tahové síly $\boldsymbol{T}_1$, $\boldsymbol{T}_2$ a $\boldsymbol{T}_3$. Pro hmotné kladky jsou velikosti těchto sil obecně různé. Pohybové rovnice pro těleso a volnou kladku (21) jsou

$$\begin{aligned} m_1 a_1 &= m_1 g - T_1\,,\\ m_2 a_2 &= -m_2 g + T_2 + T_3\,. \end{aligned}$$

Dále pišme druhou impulzovou větu (22) pro pevnou a volnou kladku

$$J_1\varepsilon_1 = (T_2 - T_1)r_1\,,$$
$$J_2\varepsilon_2 = (T_2 - T_3)r_2\,.$$

Zrychlení vláken na obou stranách pevné kladky má stejnou velikost, ale opačný směr, proto vazebná rovnice (23) má pro pevnou kladku tvar

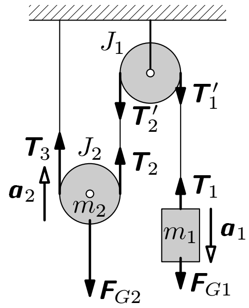
$$\varepsilon_1 r_1 = -a_1\,.$$

Zrychlení vlákna na jedné straně volné kladky je nulové, na druhé straně je $-\boldsymbol{a}_1$, pro její úhlové zrychlení podle (23) platí

$$\varepsilon_2 r_2 = \frac{1}{2}a_1\,.$$

Poslední rovnicí bude rovnice vlákna. Vlákno je vedeno přes pevnou a volnou kladku, proto použijeme kombinaci pravidel b) a c) z bodu 5

$$\boldsymbol{a}_2 = \frac{1}{2}(0 - \boldsymbol{a}_1) \quad\Rightarrow\quad a_2 = \frac{1}{2}a_1\,.$$



Obr. 14

Systém rovnic je již kompletní, můžeme se pustit do jejich řešení. Podrobný postup necháme na čtenáři, zde uvedeme jen výsledky. Souřadnice zrychlení tělesa vyjde

$$a_1 = \frac{2g(2m_1 - m_2)}{4J_1/r_1^2 + J_2/r_2^2 + 4m_1 + m_2}$$

a velikost tahové síly

$$T_1 = m_1 g\,\frac{4J_1/r_1^2 + J_2/r_2^2 + 3m_2}{4J_1/r_1^2 + J_2/r_2^2 + 4m_1 + m_2}\,.$$

Vidíme, že neobtížnější částí příkladu je správné sestavení soustavy rovnic. Její následné řešení je více méně mechanická záležitost. Můžeme si všimnout, že počet rovnic pro popis volné kladky narostl oproti příkladu, kdy byly kladky nehmotné (viz text [3]). Pro složitější soustavy proto může být řešení soustavy tolika rovnic dosti náročné.

3.3 Další příklady

Studijní text uzavřeme kapitolou, kde předvedeme některé složitější příklady, ve kterých využijeme všechny doposud nabyté znalosti. Složitější budou v tom, že se nebudeme moci držet předem daného postupu. Ovšem opět nebudeme dělat nic jiného, než hledat pohybové a vazebné rovnice soustavy. V prvním příkladu se budeme zabývat známou hračkou – jojo.

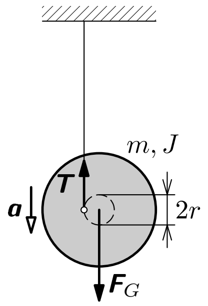
Příklad 9 – jojo

Vypočítejte zrychlení tělesa zvaného jojo o hmotnosti m a momentu setrvačnosti J (vzhledem k jeho ose), které držíme pevně na provázku. Známe poloměr vnitřní hřídelky r.

Řešení

Do obrázku (obr. 15) zakreslíme tíhovou a tahovou sílu, které působí na jojo. Předpokládaný směr zrychlení orientujeme dolů. Z první impulzové věty určíme první pohybovou rovnici

$$ma = mg - T\,.$$



Obr. 15

Z druhé impulzové věty odvodíme druhou pohybovou rovnici. Na jojo se budeme dívat, že rotuje kolem své vlastní osy, potom jediná síla, která má menulový moment, je tahová.

$$J\varepsilon = Tr\,.$$

Vlákno, na kterém jojo visí, se z hřídelky postupně odvíjí, jak jojo klesá, proto mezi úhlovým a posuvným zrychlením platí vztah

$$\varepsilon r = a\,.$$

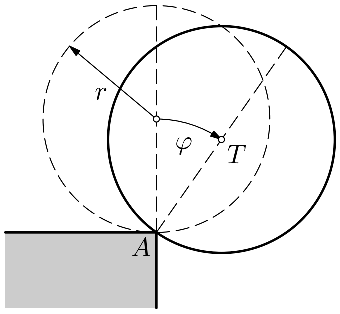
Výpočet souřadnice zrychlení ze soustavy těchto tří rovnic bude snadný. Do první rovnice dosadíme z ostatních dvou a dostaneme

$$ma = mg - Ja/r^2 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{g}{1 + J/mr^2}\,.$$

Vidíme, že výsledek je identický s odvalováním válce bez prokluzu (11) po nakloněné rovině se sklonem 90°.

Příklad 10 – koule na hraně

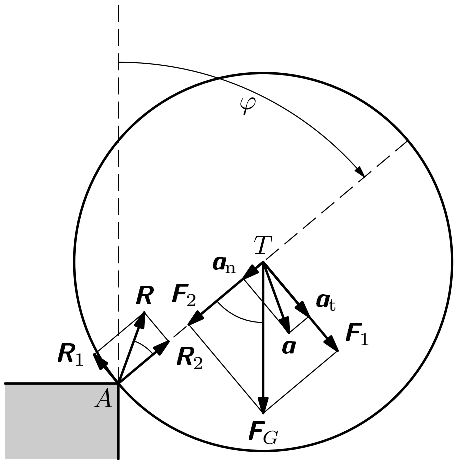
Kouli o poloměru r a hmotnosti m umístíme na okraj tuhé vodorovné desky a uvolníme. V této labilní rovnovážné poloze se neudrží a začne se působením tíhové síly otáčet okolo hrany A desky (viz obr. 16).



Obr. 16

a) Jak závisí úhlová rychlost a úhlové zrychlení koule na úhlu φ, o který se otočila z výchozí polohy?

b) Při které hodnotě úhlu φ koule sklouzne po hraně, je-li součinitel klidového tření mezi koulí a hranou $f = 0{,}25$?



Obr. 17

Řešení

a) Vycházíme z obr. 17. Dokud nedojde ke sklouznutí, otáčí se koule okolo hrany A; vzhledem k ní má moment setrvačnosti

$$J = J_\mathrm{T} + mr^2 = \frac{2}{5}mr^2 + mr^2 = \frac{7}{5}mr^2 \,.$$

Úhlovou rychlost ω koule určíme pomocí zákona zachování energie:

$$mgr(1-\cos\varphi) = \frac{1}{2}J\omega^2 = \frac{7}{10}mr^2\omega^2 \quad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{10g(1-\cos\varphi)}{7r}} \,.$$

Úhlové zrychlení ε koule určíme pomocí druhé impulzové věty.

$$mgr\sin\varphi = J\varepsilon = \frac{7}{5}mr^2\varepsilon \quad \Rightarrow \quad \varepsilon = \frac{5g\sin\varphi}{7r} \,.$$

b) Na kouli během otáčení působí tíhová síla $\boldsymbol{F}_G$ a reakce desky $\boldsymbol{R}$. Tíhovou sílu můžeme rozložit na složku $\boldsymbol{F}_1$ kolmou ke spojnici AT a na složku $\boldsymbol{F}_2$, která směřuje do bodu A. Podobně rozložíme reakci desky na složky $\boldsymbol{R}_1$ a $\boldsymbol{R}_2$. Podle první impulzové věty pro kouli platí

$$\boldsymbol{F}_G + \boldsymbol{R} = m\boldsymbol{a}_T \,,$$

$$F_1 - R_1 = ma_t = mr\varepsilon \,, \quad F_2 - R_2 = ma_n = m\omega^2 r \,.$$

S využitím vztahů odvozených v části a) můžeme tyto rovnice přepsat.

$$m\varepsilon r = \frac{5}{7}mg\sin\varphi = mg\sin\varphi - R_1\,,$$

$$m\omega^2 r = \frac{10}{7}mg(1-\cos\varphi) = mg\cos\varphi - R_2$$

a odtud pro souřadnice složek reakce dostáváme

$$R_1 = mg\sin\varphi\left(1-\frac{5}{7}\right) = \frac{2}{7}mg\sin\varphi\,,$$

$$R_2 = \frac{1}{7}mg(7\cos\varphi + 10\cos\varphi - 10) = \frac{1}{7}mg(17\cos\varphi - 10)\,.$$

S rostoucím úhlem φ se velikost složky $\boldsymbol{R}_1$ zvětšuje a velikost složky $\boldsymbol{R}_2$ zmenšuje.

Ke sklouznutí koule po hraně dojde od okamžiku, kdy $R_1 = fR_2$. Z této podmínky určíme úhel φ.

$$2\sin\varphi = f(17\cos\varphi - 10)\,,$$

rovnici umocníme a upravíme na kvadratickou rovnici pro $\cos\varphi$

$$4\sin^2\varphi = 4 - 4\cos^2\varphi = f^2(17\cos\varphi - 10)^2 = f^2(289\cos^2\varphi - 340\cos\varphi + 100)\,,$$

$$\underbrace{(289f^2+4)}_{a}\cos^2\varphi \underbrace{-340f^2}_{b}\cos\varphi + \underbrace{100f^2-4}_{c} = 0\,.$$

Po dosazení $f = 0{,}25$ dostaneme hodnoty koeficientů kvadratické rovnice $a = 22{,}0625$, $b = -21{,}25$, $c = 2{,}25$ a kořeny

$$\cos\varphi_1 = 0{,}8421\,,\quad \cos\varphi_2 = 0{,}1211\,,\qquad \varphi_1 \doteq 33^\circ\,,\quad \varphi_1 \doteq 83^\circ\,.$$

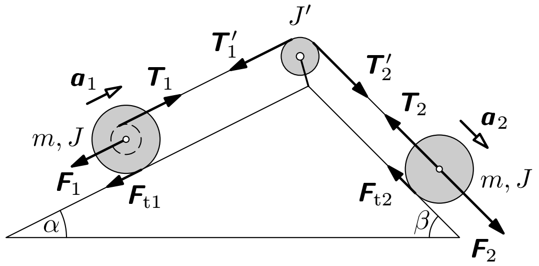
Úloze vyhovuje úhel $\varphi_1 \doteq 33^\circ$.

Příklad 11 – válec, kladka a špulka

Mějme soustavu válce, kladky a špulky podle obrázku 18.

a) Vypočítejte zrychlení špulky a válce, dochází-li k odvalování špulky i válce bez skluzu a za předpokladu, že úhel β je dostatečně větší než úhel α, aby se špulka i válec pohybovaly zleva doprava.
b) Jaká je podmínka pro součinitel klidového tření f_0, aby k odvalování válce docházelo bez prokluzu?

Dále známe hmotnost m a moment setrvačnosti J špulky i válce (pro obě tělesa jsou veličiny shodné) a moment setrvačnosti kladky J'. Válec a špulka mají stejný poloměr R, vnitřní poloměr špulky je r, poloměr kladky je R'.



Obr. 18

Řešení

a) Pokud řešíme složitější soustavy, nemusí být na první pohled zřejmé, jaký směr mají klidové třecí síly. V tom případě postupujeme tak, že pro každé těleso vybereme směr pohybu a podle toho orientujeme vektor jeho zrychlení a vektor třecí síly. Pokud z pohybových rovnic vyjde, že souřadnice jeho zrychlení nebo souřadnice třecí síly je záporná, je skutečný směr pohybu tělesa opačný.

Zde máme řešení ulehčené, protože podle předpokladu v zadání již víme, že se soustava bude pohybovat zleva doprava, a můžeme proto do obrázku 18 zakreslit třecí síly. Zrychlení špulky označíme $\boldsymbol{a}_1$ a zrychlení válce $\boldsymbol{a}_2$. Uvědomte si, že obecně se souřadnice zrychlení válce a špulky nerovnají $a_1 \neq a_2$. Jelikož se vlákno může ze špulky odvinovat, je zrychlení vlákna a válce jiné, než zrychlení špulky.

Opět začneme psát rovnice první impulzové věty pro špulku a válec (kladka je pevná a nemůže se pohybovat)

$$\begin{aligned} ma_1 &= -mg\sin\alpha + T_1 - F_{t1} \\ ma_2 &= mg\sin\beta - T_2 - F_{t2} \end{aligned}$$

a také rovnice, které vyjadřují druhou impulzovou větu pro špulku (zde mají nenulový moment tahová i třecí síla, každá má však jiné rameno), válec i kladku

$$\begin{aligned} J\varepsilon_1 &= -T_1 r - F_{t1}R\,, \\ J\varepsilon_2 &= -F_{t2}R\,, \\ J'\varepsilon' &= (T_1 - T_2)R'\,. \end{aligned}$$

Další tři rovnice říkají, že k odvalování špulky a válce dochází bez skluzu a také že vlákno po kladce neprokluzuje

$$\varepsilon_1 R = -a_1\,, \quad \varepsilon_2 R = -a_2\,, \quad \varepsilon' R' = -a_2\,.$$

Poslední devátá rovnice popisuje odvinování vlákna ze špulky. Úhlové zrychlení špulky je úměrné rozdílu souřadnic zrychlení vlákna a špulky, tj.

$$\varepsilon_1 r = -a_2 + a_1\,.$$

Podrobný postup řešení soustavy těchto devíti rovnic nebudeme uvádět (zvídavý čtenář provede sám). Důležité je ověřit, zda počet rovnic je stejný jako počet neznámých. Pokud bychom měli rovnic méně, bylo by třeba ještě nějakou zapomenutou doplnit, v opačném případě by příliš velký počet rovnic pravděpodobně znamenal nějakou chybu v úvaze (chybně určený počet stupňů volnosti soustavy, špatně označená zrychlení nebo tahové síly apod.). Pro souřadnice zrychlení špulky a kladky dostaneme

$$a_1 = \frac{\dfrac{R}{r+R}\left[\sin\beta - \dfrac{R}{r+R}\sin\alpha\right]g}{\dfrac{J'}{mR'^2} + \left[1 + \left(\dfrac{R}{r+R}\right)^2\right]\left(1 + \dfrac{J}{mR^2}\right)}\,,$$

$$a_2 = \frac{\left[\sin\beta - \dfrac{R}{r+R}\sin\alpha\right]g}{\dfrac{J'}{mR'^2} + \left[1 + \left(\dfrac{R}{r+R}\right)^2\right]\left(1 + \dfrac{J}{mR^2}\right)}\,.$$

V krajních případech dostáváme očekávané výsledky: $a_1 = a_2$ pro $r = 0$ a $a_2 = 2a_1$ pro $r = R$.

b) Aby při odvalování válce nedocházelo ke skluzu, musí platit

$$F_{t2} \leq f_0 N_2 = f_0 mg\cos\beta\,.$$

Velikosti třecí sily F_{t2} můžeme vypočítat při řešení soustavy rovnic v úkolu a). Konkrétně dostaneme

$$F_{t2} = \frac{gJ/R^2 \cdot \left[\sin\beta - \dfrac{R}{r+R}\sin\alpha\right]}{\dfrac{J'}{mR'^2} + \left[1 + \left(\dfrac{R}{r+R}\right)^2\right]\left(1 + \dfrac{J}{mR^2}\right)}\,,$$

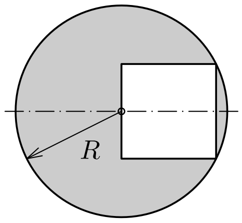
tudíž pro součinitel klidového tření musí platit

$$f_0 \geq \frac{\dfrac{J}{mR^2}\left[\operatorname{tg}\beta - \dfrac{R\sin\alpha}{(r+R)\cos\beta}\right]}{\dfrac{J'}{mR'^2} + \left[1 + \left(\dfrac{R}{r+R}\right)^2\right]\left(1 + \dfrac{J}{mR^2}\right)}\,.$$

4 Úlohy

1. Těžiště obrazce

Nalezněte těžiště homogenní kruhové desky se čtvercovým otvorem (obr. 19). Deska má všude stejnou tloušťku.



Obr. 19: K úloze 1

2. Moment setrvačnosti krychle

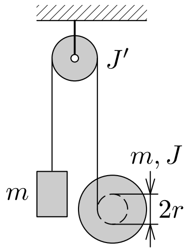
Vypočítejte moment setrvačnosti homogenní krychle o hmotnosti m vzhledem k tělesové úhlopříčce. Délka hrany krychle je a.

3. Zrychlení koule

Vypočítejte zrychlení koule o poloměru R a hmotnosti m, která se bez prokluzování odvaluje po nakloněné rovině se sklonem α. Jak dlouho jí bude trvat, než se skutálí z nakloněné roviny, která má výšku h?

4. Jojo na kladce

Na pevné kladce, která má moment setrvačnosti J' a poloměr r', je zavěšeno těleso a jojo stejné hmotnosti podle obrázku 20. Určete zrychlení tělesa i joja.

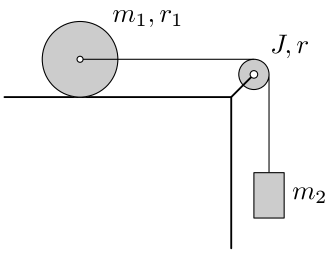


Obr. 20: K úloze 4

5. Roztáčení válce

Válec o poloměru r_1 a hmotnosti m_1 roztáčíme tak, že ho táhneme vláknem, na kterém je zavěšeno závaží o hmotnosti m_2. Vlákno je vedeno přes kladku, která má moment setrvačnosti J a poloměr r (viz obr. 21).

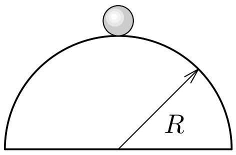
a) Jaké bude zrychlení válce, je-li součinitel klidového tření dostatečně velký, aby nedocházelo k odvalování válce s prokluzem?
b) Určete mezní hodnotu f_m, aby se válec začal odvalovat s prokluzem.
c) Jaké bude zrychlení válce, je-li součinitel klidového tření $f < f_\mathrm{m}$?



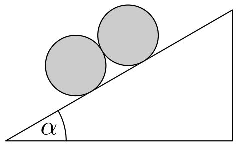
Obr. 21: K úloze 5

6. Kulička na polokouli

Malou kuličku umístíme na nejvyšší bod polokoule, která má poloměr R (viz obr. 22). Kuličku z této labilní polohy nepatrně vychýlíme a kulička se začne kutálet dolů, aniž by prokluzovala. V jaké výšce nad spodní hranou polokoule se kulička odlepí od povrchu polokoule?



Obr. 22: K úloze 6



Obr. 23: K úloze 7

7. Dotyk válců

Dva válce stejné hmotnosti i stejného poloměru leží na nakloněné rovině tak, že se vzájemně dotýkají (obr. 23). Zjistěte, zda je možné, aby válce zůstaly v klidu.

Výsledky úloh

1. Těžiště leží ve vzdálenosti

$$\frac{4R}{(5\pi - 4)\sqrt{5}}$$

od středu kruhové desky.

2. Moment setrvačnosti je $\frac{1}{6}ma^2$.

3. Velikost zrychlení koule je

$$a = \tfrac{5}{7} g \sin\alpha\,.$$

Z nakloněné roviny se koule skutálí za dobu

$$t = \sqrt{\frac{14h}{5g\sin^2\alpha}}\,.$$

4. Zrychlení $\boldsymbol{a}_1$ joja i $\boldsymbol{a}_2$ tělesa orientujeme dolů. Pro souřadnice zrychlení pak platí

$$a_1 = \frac{(1 + J'/mr'^2)g}{1 + J'/mr'^2 + (2 + J'/mr'^2)J/mr^2}\,,$$
$$a_2 = \frac{g}{1 + J'/mr'^2 + (2 + J'/mr'^2)J/mr^2}\,.$$

5. Zrychlení $\boldsymbol{a}$ válce orientujeme zleva doprava.

a) Pro souřadnici zrychlení dostaneme

$$a = \frac{2m_2 g}{3m_1 + 2m_2 + 2J/r^2}\,.$$

b) Mezní součinitel tření je

$$f_\mathrm{m} = \frac{m_2}{3m_1 + 2m_2 + 2J/r^2}\,.$$

c) Zrychlení válce při pohybu s prokluzem je

$$a = \frac{(m_2 - fm_1)g}{m_1 + m_2 + J/r^2}\,.$$

6. Kulička se od povrchu polokoule odlepí ve výšce $h = \frac{10}{17}R$.

7. Z rovnováhy sil a momentové věty plyne, že síla, kterou jsou k sobě válce přitisknuty, má nulovou velikost, a tudíž ani nemohou vzniknout třecí síly, které by udržely soustavu v klidu.

Literatura

[1] Bednařík, M., Široká, M.: *Fyzika pro gymnázia – Mechanika.* 3. vydání, Prometheus, Praha 2001.

[2] Halliday, D., Resnick, R., Walker, J.: *Fyzika, část 1 – Mechanika.* Vydání první, VUT Brno – nakladatelství VUTIUM, Brno 2000.

[3] Prachař, J., Trnka, J.: *Úlohy z mechaniky I.* Knihovnička FO č. 66. MAFY, Hradec Králové 2004.

[4] *Ročenky Fyzikálního korespondenčního semináře Fykos z let 1994–2005*. Vyd. MFF UK, Praha 1995–2005.

[5] Baník, I., Baník, R., Zámečník, J.: *Fyzika netradične, Mechanika.* Alfa, Bratislava 1990.

[6] Vybíral, B.: *Statika tuhého tělesa.* Knihovnička FO č. 26. MAFY, Hradec Králové 1996.

[7] Vybíral, B.: *Kinematika a dynamika tuhého tělesa.* Knihovnička FO č. 31. MAFY, Hradec Králové 1997.

[8] Vybíral, B., Zdeborová, L.: *Odporové síly.* Knihovnička FO č. 48. MAFY, Hradec Králové 2001.

[9] Ungermann, Z., Volf, I.: *Hmotný střed tělesa.* Škola mladých fyziků č. 16. SPN, Praha 1986.